Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

16.11.2016.

1. У зависности од реалних параметара a и b решити (Гаусовим методом) систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & b \\ x & + & a^2y & + & z & = & b. \end{array}$$

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима

$$\begin{array}{ll} u_1 = (\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ ), & w_1 = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ ), \\ u_2 = (\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\ ), & w_2 = (\ 2,\ 2,\ 4,\ 3\ ), \\ u_3 = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 2\ ), & w_3 = (\ 1,\ 1,\ 5,\ 4\ ). \end{array}$$

Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. Нека је $U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+c=0\}$.

   а) Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4$ и одредити му базу и димензију.

   б) Ако је $W = \{(-2t,0,0,3t) | t \in \mathbb{R}\} \leqslant \mathbb{R}^4$, испитати да ли је $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

4. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x,y,z) = (x+2y+3z, 2x+3y+8z, x+2y+4z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике оператора L.

   в) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

5. Нека је $A = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}_{n\times n}$. Одредити $\det A$. Ако је $n = 2016$ наћи неке $a, b \in \mathbb{R}$ за које је $rang(A) = 2016$, и образложити.

6. Ака су u, v, w линеарно независни вектори векторског простора V испитати да ли су вектори $u+v, u-v, u-2v+w$ линеарно независни.

СРЕЋНО!

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

16.11.2016.

1. У зависности од реалних параметара a и b решити (Гаусовим методом) систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & b \\ x & + & a^2y & + & z & = & b. \end{array}$$

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$$\begin{array}{llll} u_1 = (1, 2, 3, 4), & & w_1 = (1, 1, 1, 1), \\ u_2 = (4, 3, 2, 1), & & w_2 = (2, 2, 4, 3), \\ u_3 = (1, 1, 1, 2), & & w_3 = (1, 1, 5, 4). \end{array}$$
Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. Нека је $U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+c=0\}$.

   а) Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4$ и одредити му базу и димензију.

   б) Ако је $W = \{(-2t, 0, 0, 3t) | t \in \mathbb{R}\} \leqslant \mathbb{R}^4$, испитати да ли је $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

4. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x,y,z) = (x+2y+3z, 2x+3y+8z, x+2y+4z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике оператора L.

   в) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

5. Нека је $A = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}_{n \times n}$. Одредити $\det A$. Ако је $n = 2016$ наћи неке $a, b \in \mathbb{R}$ за које је $rang(A) = 2016$, и образложити.

6. Ака су u, v, w линеарно независни вектори векторског простора V испитати да ли су вектори $u+v, u-v, u-2v+w$ линеарно независни.

СРЕЋНО!