

6) A, B - матрице $m \times p$ и $p \times n$ AB определено

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

Ранг = стр. лин. нез.
матрице = стр. лин. нез. матрице

• $AB =$
 $(m, p) \quad (p, n)$
 $\uparrow$
 где AB было
 определено

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + \dots + a_{1p}b_{p1}) & (a_{11}b_{12} + \dots + a_{1p}b_{p2}) & \dots & (a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1p}b_{pn}) \\ (a_{21}b_{11} + \dots + a_{2p}b_{p1}) & (a_{21}b_{12} + \dots + a_{2p}b_{p2}) & \dots & (a_{21}b_{1n} + \dots + a_{2p}b_{pn}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}b_{11} + \dots + a_{mp}b_{p1}) & (a_{m1}b_{12} + \dots + a_{mp}b_{p2}) & \dots & (a_{m1}b_{1n} + \dots + a_{mp}b_{pn}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}) + \dots + a_{1p}(b_{p1}, b_{p2}, \dots, b_{pn}) \\ a_{21}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}) + \dots + a_{2p}(b_{p1}, b_{p2}, \dots, b_{pn}) \\ \vdots \\ a_{m1}(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}) + \dots + a_{mp}(b_{p1}, b_{p2}, \dots, b_{pn}) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ строки $AB \in L(b_1, b_2, \dots, b_p)$
 $\uparrow \uparrow$
 векторы в строках
 матрицы B

$\Rightarrow$ лин. нез. строк матрицы AB не больше $\dim(L(b_1, b_2, \dots, b_p)) = r(B)$

$\Rightarrow \boxed{r(AB) \leq r(B)}$ (1)

• $AB =$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} b_{11} + \dots + b_{p1} \begin{bmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{mp} \end{bmatrix} + \dots + b_{pn} \begin{bmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{mp} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ столбцы $AB \in L(a_1, a_2, \dots, a_p)$
 $\uparrow \uparrow$
 векторы в столбцах
 матрицы A

$\Rightarrow$ лин. нез. столбцов матрицы AB не больше $\dim(L(a_1, a_2, \dots, a_p)) = r(A)$

$\Rightarrow \boxed{r(AB) \leq r(A)}$ (2)

• (1), (2) $\Rightarrow r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$