

1.  $L_\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$L_\alpha(x, y, z) = (x + \alpha y - z, (\alpha + 1)x + 6y - 3z, -x - 2y + (\alpha - 1)z), \alpha \in \mathbb{R}$

a)  $e = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$

$L_\alpha(e_1) = (1, \alpha + 1, -1)$

$L_\alpha(e_2) = (\alpha, 6, -2)$

$L_\alpha(e_3) = (-1, -3, \alpha - 1)$

$\text{Im } L = \mathcal{L}(L_\alpha(e_1), L_\alpha(e_2), L_\alpha(e_3))$ ,  $\delta(L) = \dim(\text{Im } L)$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha+1 & -1 & (1-\alpha) \\ \alpha & 6 & -2 & \leftarrow + \\ -1 & -3 & \alpha-1 & \alpha \end{array} \right] +$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha+1 & -1 & \\ 0 & -\alpha^2 - \alpha + 6 & \alpha - 2 & \\ 0 & \alpha - 2 & \alpha - 2 & \end{array} \right]$$

1°  $\alpha = 2$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \right]$$

$\Rightarrow \delta(L) = 1$

2°  $\alpha \neq 2$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha+1 & -1 & \\ 0 & -\alpha^2 - \alpha + 6 & \alpha - 2 & \leftarrow + \\ 0 & \alpha - 2 & \alpha - 2 & \end{array} \right] +$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha+1 & -1 & \\ 0 & -\alpha^2 - \alpha + 6 & \alpha - 2 & \\ 0 & \alpha^2 + 2\alpha - 8 & 0 & \end{array} \right]$$

$((\alpha+4)(\alpha-2))$

2.1°  $\alpha \neq -4$  ( $\alpha \neq 2$ )

$\Rightarrow \delta(L) = 3$

2.2°  $\alpha = -4$

$\delta(L) = 2$

$\delta(L) = \begin{cases} 1, & \alpha = 2 \\ 2, & \alpha = -4 \\ 3, & \alpha \neq 2 \wedge \alpha \neq -4 \end{cases}$

б)  $\delta(L) = 2 \Rightarrow \alpha = -4 \Rightarrow L_{-4}(x, y, z) = (x - 4y - z, -3x + 6y - 3z, -x - 2y - 5z)$

$\text{Ker } L = \{0 = (x, y, z) \mid L(0) = 0_v\}$

...

б) L-инвариантность  $\Leftrightarrow \text{Ker } L = \{0\}$

$\Leftrightarrow \delta(L) = 0$

$\Leftrightarrow \delta(L) = 3$

$\delta(L) + \delta(L) = \dim \mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha \neq -4 \wedge \alpha \neq 2}$

6.  $L: V \rightarrow V$  - линейный оператор в пространстве  $V$ ,

$L \neq 0, (\exists k \in \mathbb{N}) L^k = 0$

a)  $m_L(\lambda) = \lambda^m$  - минимальный полином  $3 \leq m$

\* Это же  $p(L) = 0 \Rightarrow m_L \mid p$

Како  $(\exists k \in \mathbb{N}) L^k = 0$

$\Rightarrow L$  аннулируется полиномом  $p(t) = t^k$  и  $L \neq 0$

$\Rightarrow m_L$  является делителем полинома  $p(t)$ , т.е.  $m_L \in \{1, t, \dots, t^k\}$

Это же  $m_L(t) = 1 \Rightarrow 0 = m_L(L) = 1 \cdot I$

Это же  $m_L(t) = t \Rightarrow 0 = m_L(L) = L \cdot I$

$\Rightarrow m_L \in \{t^2, \dots, t^k\}$

$\Rightarrow m_L(t) = t^m, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ , а это значит и что  $L^m = 0, L^{m-1} \neq 0$

$$5) m: m_L(t) = t^m, m \in \mathbb{N}$$

$$\exists u \in V: L^{m-1}(u) \neq 0$$

$$(n.o.) (\forall u \in V) L^{m-1}(u) = 0 \Rightarrow L^{m-1} = 0 \text{ нуль оператор}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\exists u \in V) L^{m-1}(u) \neq 0}$$

$$6) \vartheta = L^{m-1}(u) \in \ker L \cap \operatorname{Im} L ?$$

$$\bullet L(\vartheta) = L(L^{m-1}(u)) = L^m(u) = 0 \Rightarrow \boxed{\vartheta \in \ker L}$$

$\underbrace{\quad}_{=0 \text{ нуль оператор}}$

$$\bullet \vartheta = L^{m-1}(u) = L(L^{m-2}(u)) \in \operatorname{Im} L \Rightarrow \boxed{\vartheta \in \operatorname{Im} L}$$

$\uparrow$   
 $m \geq 2$   
 so  $m=2 \rightarrow L^{m-2}(u) = L^0(u) = \operatorname{Id}(u) = u$