# Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 08.02.2017.

**Други ток**

1. Нека је $L_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ фамилија линеарних оператора дефинисана са $L_\alpha(x, y, z) = (x + \alpha y - z, (\alpha + 1)x + 6y - 3z, -x - 2y + (\alpha - 1)z), \alpha \in \mathbb{R}$.
   а) Одредити ранг оператора $L_\alpha$ у зависности од реалног параметра $\alpha$
   б) Одредити језгро оператора $L_\alpha$ за случај када је ранг оператора једнак 2.
   в) За које $\alpha$ је $L_\alpha$ инвертибилан?
2. Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^4$ решења једначине $x + y + z + t = 0$.
   а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора $W$ и $W^\perp$.
   б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v = (3, -2, 4, 3)$ на потпросторе $W$ и $W^\perp$. Ком од простора $W$ и $W^\perp$ вектор $v$ ближи?
3. Нека је $V$ потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (5, -3, -1, 1)$, $f_2 = (21, 1, -5, 1)$ и $f_3 = (5, -15, 5, 7)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за $V$ и $V^\perp$.
4. Одредити формуле рефлексије простора у односу на раван $\alpha : x + 2y - z + 3 = 0$.
5. Свести једначину криве $x^2 - xy + y^2 - 3y - 1 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која је то крива и колики је њен ексцентрицитет? Скицирати полазну криву и одредити јој жижу и директрису.
6. Нека је $L : V \to V$ линеарни оператор векторског простора $V$. Ако је $L \neq 0$ и ако $(\exists k \in \mathbb{N})L^k = 0$:
   а) Доказати да је $m_L(\lambda) = \lambda^m, m \in \mathbb{N}$ минимални полином оператора $L$.
   б) Доказати да за такво $m \in \mathbb{N}$ постоји вектор $u \in V$ такав да је $L^{m-1}(u) \neq 0$.
   в) Доказати да је за такво $u \in V$, $v = L^{m-1}(u) \in KerL \cap ImL$.


# Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 08.02.2017.

**Други ток**

1. Нека је $L_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ фамилија линеарних оператора дефинисана са $L_\alpha(x, y, z) = (x + \alpha y - z, (\alpha + 1)x + 6y - 3z, -x - 2y + (\alpha - 1)z), \alpha \in \mathbb{R}$.
   а) Одредити ранг оператора $L_\alpha$ у зависности од реалног параметра $\alpha$
   б) Одредити језгро оператора $L_\alpha$ за случај када је ранг оператора једнак 2.
   в) За које $\alpha$ је $L_\alpha$ инвертибилан?
2. Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^4$ решења једначине $x + y + z + t = 0$.
   а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора $W$ и $W^\perp$.
   б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v = (3, -2, 4, 3)$ на потпросторе $W$ и $W^\perp$. Ком од простора $W$ и $W^\perp$ вектор $v$ ближи?
3. Нека је $V$ потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (5, -3, -1, 1)$, $f_2 = (21, 1, -5, 1)$ и $f_3 = (5, -15, 5, 7)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за $V$ и $V^\perp$.
4. Одредити формуле рефлексије простора у односу на раван $\alpha : x + 2y - z + 3 = 0$.
5. Свести једначину криве $x^2 - xy + y^2 - 3y - 1 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације. Која је то крива и колики је њен ексцентрицитет? Скицирати полазну криву и одредити јој жижу и директрису.
6. Нека је $L : V \to V$ линеарни оператор векторског простора $V$. Ако је $L \neq 0$ и ако $(\exists k \in \mathbb{N})L^k = 0$:
   а) Доказати да је $m_L(\lambda) = \lambda^m, m \in \mathbb{N}$ минимални полином оператора $L$.
   б) Доказати да за такво $m \in \mathbb{N}$ постоји вектор $u \in V$ такав да је $L^{m-1}(u) \neq 0$.
   в) Доказати да је за такво $u \in V$, $v = L^{m-1}(u) \in KerL \cap ImL$.