Линеарна алгебра и аналитичка геометрија
18.11.2015.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & + & w & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & + & 3t & + & w & = & 1 \\ -x & + & 3y & - & 5z & + & 4t & - & 9w & = & -3 \\ -x & + & 4y & - & 6z & + & 5t & - & 10w & = & -4. \end{array}$$

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$$\begin{array}{lll} u_1 = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ ), & & w_1 = (\ 3,\ 3,\ 3,\ 3\ ), \\ u_2 = (\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ ), & & w_2 = (\ 3,\ 3,\ 5,\ 7\ ), \\ u_3 = (\ 2,\ 3,\ 3,\ 3\ ), & & w_3 = (\ 2,\ 3,\ 4,\ 4\ ). \end{array}$$
Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. Нека је $U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b+c=0\}$.
   а) Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4$ и одредити му базу и димензију.
   б) Ако је $W = \{(-t,2t,0,0) | t \in \mathbb{R}\} \leqslant \mathbb{R}^4$, испитати да ли је $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

4. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x,y,z) = (x+y+z, x+2y+3z, 2x+3y+3z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

5. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са $L(x,y,z,t) = (x+y+z+t, 2x+3y+z+3t, -x+3y-5z+4t)$.
Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике пресликавања L.

6. Ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, одредити $\det A$ и $rang A$, као и инверз матрице A, ако постоји.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

18.11.2015.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & + & w & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & + & 3t & + & w & = & 1 \\ -x & + & 3y & - & 5z & + & 4t & - & 9w & = & -3 \\ -x & + & 4y & - & 6z & + & 5t & - & 10w & = & -4. \end{array}$$

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$$\begin{array}{lll} u_1 = (\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ ), & & w_1 = (\ 3,\ 3,\ 3,\ 3\ ), \\ u_2 = (\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ ), & & w_2 = (\ 3,\ 3,\ 5,\ 7\ ), \\ u_3 = (\ 2,\ 3,\ 3,\ 3\ ), & & w_3 = (\ 2,\ 3,\ 4,\ 4\ ). \end{array}$$
Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. Нека је $U = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a+b+c=0\}$.

   а) Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^4$ и одредити му базу и димензију.

   б) Ако је $W = \{(-t, 2t, 0, 0) | t \in \mathbb{R}\} \leqslant \mathbb{R}^4$, испитати да ли је $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

4. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x,y,z) = (x+y+z, x+2y+3z, 2x+3y+3z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

5. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са $L(x,y,z,t) = (x+y+z+t, 2x+3y+z+3t, -x+3y-5z+4t)$.
Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике пресликавања L.

6. Ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, одредити $\det A$ и $rang A$, као и инверз матрице A, ако постоји.