Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 03.09.2015.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$: $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x &+& 2y &+& 3z &-& 2t &-& w &=& 2 \\ -x &-& y &-& 2z &+& t &+& w &=& -9 \\ 2x &+& 7y &+& 9z &-& 6t &-& 2w &=& 2. \end{array}$

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $w_1 = (1, 0, 1, 2)$,
$u_2 = (-2, -1, -2, -1)$, $w_2 = (2, 7, 2, 10)$,
$u_3 = (-2, 0, -3, 3)$, $w_3 = (-3, 1, -3, -5)$.
Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са
$L(x, y, z) = (x + 2y - z, x + 3y - 4z, x + 2y - 2z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.
   в) Одредити $Ker(L^{-1})$ и $Im(L)$.

4. Одредити карактеристични полином матрице $A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 10 \\ -4 & -5 & 10 \\ -4 & -4 & 9 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (1, -1, -3, 5)$, $f_2 = (1, -5, 1, 21)$ и $f_3 = (7, 5, -15, 5)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неку ортонормирану базу за V.

6. Одредити формуле централне симетрије у односу на тачку $S(0, -1, 6)$ и слику праве $p : \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+3}{16}$ при то симетрији.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 03.09.2015.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$: $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x &+& 2y &+& 3z &-& 2t &-& w &=& 2 \\ -x &-& y &-& 2z &+& t &+& w &=& -9 \\ 2x &+& 7y &+& 9z &-& 6t &-& 2w &=& 2. \end{array}$

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $w_1 = (1, 0, 1, 2)$,
$u_2 = (-2, -1, -2, -1)$, $w_2 = (2, 7, 2, 10)$,
$u_3 = (-2, 0, -3, 3)$, $w_3 = (-3, 1, -3, -5)$.
Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са
$L(x, y, z) = (x + 2y - z, x + 3y - 4z, x + 2y - 2z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.
   в) Одредити $Ker(L^{-1})$ и $Im(L)$.

4. Одредити карактеристични полином матрице $A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & 10 \\ -4 & -5 & 10 \\ -4 & -4 & 9 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (1, -1, -3, 5)$, $f_2 = (1, -5, 1, 21)$ и $f_3 = (7, 5, -15, 5)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неку ортонормирану базу за V.

6. Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^3$ решења једначине $-x - 2y + 2z = 0$.
   а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора W и $W^{\perp}$.
   б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v = (1, 4, 0)$ на потпросторе W и $W^{\perp}$. Ком од потпростора W и $W^{\perp}$ је вектор v ближи?