Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 15.01.2015.

Први ток

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$: $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & t & - & w & = & 1 \\ x & & & + & 2z & + & t & & & = & 7 \\ 2x & + & y & + & 4z & - & t & + & w & = & 4 \\ 3x & + & 3y & + & 6z & - & 2t & - & 4w & = & 6 \end{array}$.

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$$\begin{array}{lll} u_1 = (1, -1, 1, 2), & & w_1 = (1, -1, 0, 4), \\ u_2 = (1, 0, 2, 6), & & w_2 = (1, -1, 1, 2), \\ u_3 = (2, -2, -1, 19), & & w_3 = (-3, 3, -5, 4), \\ u_4 = (4, -3, 2, 27); & & w_4 = (-1, 1, -4, 10). \end{array}$$
Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x, y, z) = (x - 2z, -y, x - y - z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

4. Одредити карактеристични полином матрице $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n.

5. а) Одредити једначину праве која садржи пресек правих $p : 2x = 3y = \frac{z+7}{2}$ и $q : \frac{x-5}{2} = y - 3 = \frac{z-10}{5}$ и нормална је на раван $\alpha : 2x - 18y + z + 46 = 0$

   б) Одредити слику тачке $A(3, -1, 0)$ при симетрији у односу на праву $p : \frac{x-1}{2} = y - 3 = \frac{z}{5}$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 15.01.2015.

Први ток

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$: $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & t & - & w & = & 1 \\ x & & & + & 2z & + & t & & & = & 7 \\ 2x & + & y & + & 4z & - & t & + & w & = & 4 \\ 3x & + & 3y & + & 6z & - & 2t & - & 4w & = & 6 \end{array}$.

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$$\begin{array}{lll} u_1 = (1, -1, 1, 2), & & w_1 = (1, -1, 0, 4), \\ u_2 = (1, 0, 2, 6), & & w_2 = (1, -1, 1, 2), \\ u_3 = (2, -2, -1, 19), & & w_3 = (-3, 3, -5, 4), \\ u_4 = (4, -3, 2, 27); & & w_4 = (-1, 1, -4, 10). \end{array}$$
Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x, y, z) = (x - 2z, -y, x - y - z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

4. Одредити карактеристични полином матрице $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n.

5. а) Одредити једначину праве која садржи пресек правих $p : 2x = 3y = \frac{z+7}{2}$ и $q : \frac{x-5}{2} = y - 3 = \frac{z-10}{5}$ и нормална је на раван $\alpha : 2x - 18y + z + 46 = 0$

   б) Одредити слику тачке $A(3, -1, 0)$ при симетрији у односу на праву $p : \frac{x-1}{2} = y - 3 = \frac{z}{5}$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 15.01.2015.

Други ток

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$: $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & t & - & w & = & 1 \\ x & & & + & 2z & + & t & & & = & 7 \\ 2x & + & y & + & 4z & - & t & + & w & = & 4 \\ 3x & + & 3y & + & 6z & - & 2t & - & 4w & = & 6 \end{array}$.

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$$\begin{array}{lll} u_1 = (1, -1, 1, 2), & & w_1 = (1, -1, 0, 4), \\ u_2 = (1, 0, 2, 6), & & w_2 = (1, -1, 1, 2), \\ u_3 = (2, -2, -1, 19), & & w_3 = (-3, 3, -5, 4), \\ u_4 = (4, -3, 2, 27); & & w_4 = (-1, 1, -4, 10). \end{array}$$
Наћи бар једну базу, као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$.

3'. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x, y, z) = (x - 2z, -y, x - y - z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

4. Одредити карактеристични полином матрице $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n.

5. Дат је векторски потпростор $W \subseteq \mathbb{R}^3$ решења једначине $2x - y - 2z = 0$.

а) Наћи неке базе, као и димензије потпростора W и $W^{\perp}$.

б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v = (0, 1, 4)$ на потпросторе W и $W^{\perp}$. Ком од потпростора W и $W^{\perp}$ је вектор v ближи?

* НАПОМЕНА: Студенти другог тока бирају један од задатака 3 и 3'.