Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 14.06.2015.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 4 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 1 \\ & & & & z & + & t & = & 2 \\ 3x & & & + & 2z & & & = & 5 \\ 5x & - & y & + & 3z & - & t & = & 6. \end{array}$$

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$$\begin{array}{lll} u_1 = (1, 2, 3, 4), & & w_1 = (7, -4, -4, -4), \\ u_2 = (-2, -5, 3, -1), & & w_2 = (4, 0, -2, -1), \\ u_3 = (-2, -4, -6, -8), & & w_3 = (3, -1, 2, 0), \\ u_4 = (3, 10, 2, 2); & & w_4 = (2, 1, 1, 1). \end{array}$$
Наћи бар једну базу, као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, дефинисано са
$L(x,y,z,t) = (x+2y+z-t, -x-3y-z+3t, x+y+2z-t, x+y+z)$, линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^4$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^4$.

   в) Одредити $Ker(L^{-1})$ и $Im(L)$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n.

5. Нека је $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неку ортонормирану базу за V.

6. Одредити растојање између паралелних равни $x - 2y + 5z + 27 = 0$ и $x - 2y + 5z - 3 = 0$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 14.06.2015.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 4 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 1 \\ & & & & z & + & t & = & 2 \\ 3x & & & + & 2z & & & = & 5 \\ 5x & - & y & + & 3z & - & t & = & 6. \end{array}$$

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$$\begin{array}{lll} u_1 = (1, 2, 3, 4), & & w_1 = (7, -4, -4, -4), \\ u_2 = (-2, -5, 3, -1), & & w_2 = (4, 0, -2, -1), \\ u_3 = (-2, -4, -6, -8), & & w_3 = (3, -1, 2, 0), \\ u_4 = (3, 10, 2, 2); & & w_4 = (2, 1, 1, 1). \end{array}$$
Наћи по једну базу, као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, дефинисано са
$L(x,y,z,t) = (x+2y+z-t, -x-3y-z+3t, x+y+2z-t, x+y+z)$, линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^4$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^4$.

   в) Одредити $Ker(L^{-1})$ и $Im(L)$.

4. Одредити карактеристични полином матрице $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n.

5. Нека је $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неку ортонормирану базу за V.

6. Одредити угао између вектора $a = (2, 6, -2, 6)$ и потпростора U векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисаног векторима $(1, 4, 3, 0)$ и $(0, 3, 2, 1)$.