Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 22.01.2015.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$: $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & t & + & w & = & 7 \\ x & + & 2y & + & 4z & & & + & 3w & = & 10 \\ 3x & + & 3y & + & 4z & - & 3t & & & = & 11 \\ 2x & - & 2y & & & - & 6t & + & 3w & = & 22 \end{array}$.

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$\begin{array}{lclcl} u_1 & = & (\ 2,\ 5,\ 3,\ 1\ ), & w_1 & = & (\ 3,\ 1,\ -1,\ 0\ ), \\ u_2 & = & (\ 3,\ 9,\ 5,\ 1\ ), & w_2 & = & (\ -2,\ 0,\ 2,\ 1\ ), \\ u_3 & = & (\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\ ), & w_3 & = & (\ 4,\ 2,\ 0,\ 1\ ). \end{array}$
Наћи бар једну базу, као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са
$L(x,y,z,t) = (x+2y+4z, 3x+3y+4z-3t, 2x-2y-6t)$.
Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе слике и језгра пресликавања L.

4. Одредити карактеристични полином матрице $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (5,-3,-1,1)$, $f_2 = (21,1,-5,1)$ и $f_3 = (5,-15,5,7)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неку ортонормирану базу за V.

6. а) Одредити једначину равни која садржи праве $p : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{2}$ и $q : \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{1}$
   б) Одредити једначину праве која садржи тачку $X(1,0,1)$, паралелна је равни $\alpha : x+y+3=0$ и сече праву $p : \dfrac{x}{-5} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 22.01.2015.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$: $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & t & + & w & = & 7 \\ x & + & 2y & + & 4z & & & + & 3w & = & 10 \\ 3x & + & 3y & + & 4z & - & 3t & & & = & 11 \\ 2x & - & 2y & & & - & 6t & + & 3w & = & 22 \end{array}$.

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$\begin{array}{lclcl} u_1 & = & (\ 2,\ 5,\ 3,\ 1\ ), & w_1 & = & (\ 3,\ 1,\ -1,\ 0\ ), \\ u_2 & = & (\ 3,\ 9,\ 5,\ 1\ ), & w_2 & = & (\ -2,\ 0,\ 2,\ 1\ ), \\ u_3 & = & (\ 2,\ 2,\ 2,\ 2\ ), & w_3 & = & (\ 4,\ 2,\ 0,\ 1\ ). \end{array}$
Наћи бар једну базу, као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са
$L(x,y,z,t) = (x+2y+4z, 3x+3y+4z-3t, 2x-2y-6t)$.
Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе слике и језгра пресликавања L.

4. Одредити карактеристични полином матрице $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (5,-3,-1,1)$, $f_2 = (21,1,-5,1)$ и $f_3 = (5,-15,5,7)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неку ортонормирану базу за V.

6. Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (1,1,1,1)$ на потпростор U векторског простора $\mathbb{R}^4$ који је генерисан векторима $e_1 = (1,-1,-1,-1)$ и $e_2 = (-1,1,-1,-1)$. Затим одредити растојање вектора v од потпростора U, као и угао који v заклапа са потпростором $U.\mathcal{G}$