

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 12.02.2015.

$$2x + 4y + 4z + 2t = 0$$

$$3x + 3y + 2z + t = 2$$

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$-4x - 2y = -4$$

$$x + 5y + 3z + 2t = -2$$

$$4x + 2y + 3z + t = 4.$$

2. Нека су $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0, x + 2z + 4t = 0, -3x - 5y - z + 3t = 0\}$ и $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - t = 0, x + y + 3t = 0, 2x + 2y + z + 2t = 0\}$ потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$. Наћи бар једну базу као и димензију простора U , W , $U + W$ и $U \cap W$. Да ли је сума $U + W$ директна?
3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$ дефинисан са $L(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + y + z, 3x + y)$.
- а) Наћи матрицу оператора L у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}^3$.
- б) Одредити ранг и дефект оператора L .
- в) Да ли је оператор L инвертибилан? Ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}^3$.

4. Одредити карактеристични полином матрице $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -6 \\ -12 & 9 & -12 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n .

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (1, 1, 1, 1)$, $f_2 = (2, 3, 4, 7)$ и $f_3 = (1, 2, -1, 6)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неку ортонормирану базу за V .
6. а) Одредити тачку симетричну тачки $(1, 2, 3)$ у односу на раван $\alpha : x + y + z + 6 = 0$.
- б) Одредити једначину равни која садржи праву $p : x = y = z$ и нормална је на раван $\alpha : x + 2y + 3z + 4 = 0$.
- в) Одредити површину троугла ABC , ако његова темена имају координате $A(12, -3)$, $B(1, -4)$ и $C(-3, -2)$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 12.02.2015.

$$2x + 4y + 4z + 2t = 0$$

$$3x + 3y + 2z + t = 2$$

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$-4x - 2y = -4$$

$$x + 5y + 3z + 2t = -2$$

$$4x + 2y + 3z + t = 4.$$

2. Нека су $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0, x + 2z + 4t = 0, -3x - 5y - z + 3t = 0\}$ и $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - t = 0, x + y + 3t = 0, 2x + 2y + z + 2t = 0\}$ потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$. Наћи бар једну базу као и димензију простора U , W , $U + W$ и $U \cap W$. Да ли је сума $U + W$ директна?
3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$ дефинисан са $L(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + y + z, 3x + y)$.
- а) Наћи матрицу оператора L у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}^3$.
- б) Одредити ранг и дефект оператора L .
- в) Да ли је оператор L инвертибилан? Ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}^3$.

4. Одредити карактеристични полином матрице $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -6 \\ -12 & 9 & -12 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n .

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (1, 1, 1, 1)$, $f_2 = (2, 3, 4, 7)$ и $f_3 = (1, 2, -1, 6)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неку ортонормирану базу за V .
6. Дат је потпростор W векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $w_1 = (1, 1, 1, 1)$ и $w_2 = (1, 2, 0, 4)$.
- а) Наћи неку базу, као и димензију потпростора $W^\perp$.
- б) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (1, 0, 2, -2)$ на потпростор W . Ком од потпростора W и $W^\perp$ је вектор v ближи?