Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 31.08.2014.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & 2t & + & w & = & -1 \\ 3x & + & 3y & + & 7z & + & 4t & + & 2w & = & -2 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & - & 5t & - & 2w & = & -1 \end{array}.$$

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$$\begin{array}{lll} u_1 = (1, 1, 1, 1), & & w_1 = (1, 2, 3, 4), \\ u_2 = (-1, 0, 1, 2), & & w_2 = (2, 3, 4, 5), \\ u_3 = (-2, 1, 1, -1), & & w_3 = (-2, -1, 0, 4), \\ u_4 = (-2, 2, 3, 2); & & w_4 = (0, 2, 4, 9). \end{array}$$
Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.
   в) Одредити $Ker(L^{-1})$ и $Im(L)$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$.
Одредити A^n.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (-1, 1, 1, -1)$, $f_2 = (3, -1, -1, 3)$ и $f_3 = (-5, -1, 1, -7)$.
Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^\perp$.

6. Дат је векторски простор W решења једначине $x + y + z = 0$ у $\mathbb{R}^3$.
   а) Наћи базу и димензију векторског простора W.
   б) Наћи базу и димензију векторског простора $W^\perp$.
   в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (-1, 1, 3)$ на простор W, као и растојање вектора v од векторског простора W.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 31.08.2014.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & + & 2z & - & 2t & + & w & = & -1 \\ 3x & + & 3y & + & 7z & + & 4t & + & 2w & = & -2 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & - & 5t & - & 2w & = & -1 \end{array}.$$

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$$\begin{array}{llll} u_1 = (1, 1, 1, 1), & w_1 = (1, 2, 3, 4), \\ u_2 = (-1, 0, 1, 2), & w_2 = (2, 3, 4, 5), \\ u_3 = (-2, 1, 1, -1), & w_3 = (-2, -1, 0, 4), \\ u_4 = (-2, 2, 3, 2); & w_4 = (0, 2, 4, 9). \end{array}$$
Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x,y,z) = (x+z, y+z, x+y+z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.
   в) Одредити $Ker(L^{-1})$ и $Im(L)$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$.
Одредити A^n.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (-1,1,1,-1)$, $f_2 = (3,-1,-1,3)$ и $f_3 = (-5,-1,1,-7)$.
Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^\perp$.

6. Дат је векторски простор W решења једначине $x+y+z=0$ у $\mathbb{R}^3$.
   а) Наћи базу и димензију векторског простора W.
   б) Наћи базу и димензију векторског простора $W^\perp$.
   в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (-1,1,3)$ на простор W, као и растојање вектора v од векторског простора W.