

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 15.06.2014.

$$x + 2y - z + 3t = 3$$

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$: $2x + 4y + 4z + 3t = 9$.

$$3x + 6y - z + 8t = 10$$

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима

$$u_1 = (1, -5, -4, 2), \quad w_1 = (1, 2, -2, 1),$$

$$u_2 = (1, 1, -1, 5), \quad w_2 = (1, 3, -1, 4),$$

$$u_3 = (2, -4, -5, 7), \quad w_3 = (2, 1, -7, 7).$$

$$u_4 = (1, -7, -5, 1);$$

Наћи бар једну базу као и димензију простора U , W , $U + W$ и $U \cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ дефинисано са

$L(x, y, z) = (x + y, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

в) Одредити $\text{Ker}(L^{-1})$ и $\text{Im}(L)$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 6 \\ 6 & -13 & 8 \\ 6 & -12 & 7 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n .

5. Нека је $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, 3x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^\perp$.

6. Нека је V векторски потпростор векторског простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима $\vec{a} = (-1, 2, 3, 2, 1)$ и $\vec{b} = (2, -1, 7, 4, 2)$.

а) Одредити ортогоналне пројекције вектора $\vec{w} = (-5, -1, 13, 8, 7)$ на V и $V^\perp$.

б) Којем од потпростора V и $V^\perp$ је вектор $\vec{w}$ ближи?