Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 18.01.2014.

Прва група

$\boxed{1.}$ Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$: $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & t & - & w & = & 1 \\ -2x & - & 3y & + & 4z & - & 3t & + & 4w & = & -2 \\ -3x & - & 3y & + & 3z & - & 2t & + & 2w & = & 2 \end{array}$.

$\boxed{2.}$ Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима

$$\begin{array}{rclrcl} u_1 & = & (\ 1,\ 0,\ 1,\ 0\ ), & w_1 & = & (\ 1,\ 1,\ 3,\ 1\ ), \\ u_2 & = & (\ -2,\ 1,\ 0,\ 1\ ), & w_2 & = & (\ 2,\ 1,\ 4,\ 1\ ), \\ u_3 & = & (\ 1,\ 1,\ 10,\ 6\ ), & w_3 & = & (\ 1,\ 1,\ 4,\ 2\ ), \\ u_4 & = & (\ 0,\ 2,\ 11,\ 7\ ); & w_4 & = & (\ 4,\ 3,\ 11,\ 4\ ). \end{array}$$

Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U\cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x,y,z)=(x-2y-z,-2x+3y+5z,x-2y)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

   в) Одредити $Ker(L^{-1})$ и $Im(L)$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -9 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A=PDP^{-1}$. Одредити A^n.

$\boxed{5.}$ Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1=(4,2,2,1)$, $f_2=(7,2,6,6)$ и $f_3=(-9,-11,-2,12)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^\perp$.

6. Дат је векторски простор W решења једначине $2x-y-z-t=0$.

а) Наћи базу и димензију векторског простора W.

б) Наћи базу и димензију векторског простора $W^\perp$.

в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v=(3,-1,0,0)$ на простор W, растојање вектора v од векторског простора W, као и угао између вектора v од векторског простора $W^\perp$.

$\boxed{7.}$ Одредити инверз матрице: $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{8.}$ Нека је $U=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid -a+4b=0\}$.

а) Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^3$ и одредити му базу и димензију.

б) Ако је $W=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \mid -a+3b+c=0,\ -a+4b-c=0\}\leqslant\mathbb{R}^3$, испитати да ли је $\mathbb{R}^3=U\oplus W$.

9. Нека је $L:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са $L(x,y,z,t)=(x+y+z-t,x+2y+t,3x+4y+2z-t)$.
Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база векторских простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике пресликавања L.

10. Израчунати вредност детерминанте: $\begin{vmatrix} 18 & 1 & 1 & 1 \\ 18 & 2 & 1 & 4 \\ 18 & 1 & 0 & -2 \\ 18 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Напомена:

- Задаци 1.-6. чине писмени испит.
- Задаци 1. 2. 5. 7. и 8. чине I колоквијум.
- Задаци 3. 4. 6. 9. и 10. чине II колоквијум.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 18.01.2014.

Друга група

$\boxed{1.}$ Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$: $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -x & + & y & - & z & + & t & - & w & = & 2 \\ -2x & + & 2y & + & z & + & 5t & - & 14w & = & 7 \\ 3x & - & 3y & + & 3z & - & 2t & + & 3w & = & -6 \end{array}$.

$\boxed{2.}$ Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима

$$\begin{array}{lll} u_1 = (1,\ 0,\ 2,\ 0), & & w_1 = (1,\ 1,\ 0,\ -1), \\ u_2 = (1,\ 1,\ 0,\ -1), & & w_2 = (3,\ 1,\ 4,\ -1), \\ u_3 = (2,\ 0,\ 3,\ 1), & & w_3 = (1,\ 1,\ 1,\ 6), \\ u_4 = (5,\ 2,\ 5,\ -1); & & w_4 = (2,\ 0,\ 2,\ -14). \end{array}$$

Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x,y,z) = (-x+3y+z, -x+4y-z, -x+4y)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

   в) Одредити $Ker(L^{-1})$ и $Im(L)$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -5 & -9 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 15 & 4 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n.

$\boxed{5.}$ Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (1,2,2,4)$, $f_2 = (6,6,2,7)$ и $f_3 = (12,-2,-11,-9)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^{\perp}$.

6. Дат је векторски простор W решења једначине $2x+y+z+t=0$.

а) Наћи базу и димензију векторског простора W.

б) Наћи базу и димензију векторског простора $W^{\perp}$.

в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (2,2,2,-1)$ на простор W, растојање вектора v од векторског простора W, као и угао између вектора v од векторског простора $W^{\perp}$.

$\boxed{7.}$ Одредити инверз матрице: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{8.}$ Нека је $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a-2b=0\}$.

а) Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^3$ и одредити му базу и димензију.

б) Ако је $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a-2b-c=0,\ -2a+3b+5c=0\} \leqslant \mathbb{R}^3$, испитати да ли је $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

9. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са $L(x,y,z,t) = (x-y+z-t, x+3z-2t, x+2y+7z-4t)$.
Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база векторских простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике пресликавања L.

10. Израчунати вредност детерминанте: $\begin{vmatrix} 18 & 1 & 1 & 1 \\ 18 & 2 & 1 & 4 \\ 18 & 1 & 0 & -2 \\ 18 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Напомена:

- Задаци 1.-6. чине писмени испит.
- Задаци 1. 2. 5. 7. и 8. чине I колоквијум.
- Задаци 3. 4. 6. 9. и 10. чине II колоквијум.