

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 10.02.2014.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$2x - 3y + 2z - 4t + 2w = 5$$

$$2x - 3y + 2z - 3t - w = 5.$$

$$4x - 5y + 4z - 5t + w = 11$$

2. Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима:

$$u_1 = (1, 2, 3, 0), \quad v_1 = (3, 0, 4, 3),$$

$$u_2 = (1, 3, 2, 2), \quad v_2 = (1, 3, 2, 2),$$

$$u_3 = (3, 7, 8, 2); \quad v_3 = (1, 3, 3, 3),$$

$$v_4 = (2, -3, 3, 2).$$

Наћи бар једну базу, као и димензију простора U , V , $U + V$ и $U \cap V$.

3. Дат је векторски простор W решења једначине $x + 2y + z = 0$ у $\mathbb{R}^3$.

а) Наћи неку ортонормирану базу, као и димензију простора W .

б) Наћи неку ортонормирану базу, као и димензију простора $W^\perp$.

в) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора

$v = (-3, 4, 7)$ на простор W , растојање вектора v од векторског простора W , као и угао између њих.

4. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са

$$L(x, y, z, t) = (x + 3y - z + 4t, 2x + 6y + 2z, x + 3y + 3z - 4t).$$

Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра $\text{Ker} L$ и слике $\text{Im} L$ пресликавања L .

5. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 5 & 2 \\ -5 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Одредити $\det A$, као и $\text{rang}(A^T A)$, али без израчунавања матрице $A^T A$.

6. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Одредити формулу за A^n , $n \in \mathbb{N}$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 10.02.2014.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$2x - 3y + 2z - 4t + 2w = 5$$

$$2x - 3y + 2z - 3t - w = 5.$$

$$4x - 5y + 4z - 5t + w = 11$$

2. Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима:

$$u_1 = (1, 2, 3, 0), \quad v_1 = (3, 0, 4, 3),$$

$$u_2 = (1, 3, 2, 2), \quad v_2 = (1, 3, 2, 2),$$

$$u_3 = (3, 7, 8, 2); \quad v_3 = (1, 3, 3, 3),$$

$$v_4 = (2, -3, 3, 2).$$

Наћи бар једну базу, као и димензију простора U , V , $U + V$ и $U \cap V$.

3. Дат је векторски простор W решења једначине $x + 2y + z = 0$ у $\mathbb{R}^3$.

а) Наћи неку ортонормирану базу, као и димензију простора W .

б) Наћи неку ортонормирану базу, као и димензију простора $W^\perp$.

в) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (-3, 4, 7)$ на простор W , растојање вектора v од векторског простора W , као и угао између њих.

4. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са

$$L(x, y, z, t) = (x + 3y - z + 4t, 2x + 6y + 2z, x + 3y + 3z - 4t).$$

Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра $\text{Ker} L$ и слике $\text{Im} L$ пресликавања L .

5. Дата је матрица $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 5 & 2 \\ -5 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Одредити $\det A$, као и $\text{rang}(A^T A)$,

али без израчунавања матрице $A^T A$.

6. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Одредити формулу за A^n , $n \in \mathbb{N}$.