Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, други колоквијум 22.12.2013.

Прва група

1. Дат је векторски простор $W \subseteq \mathbb{R}^3$ решења једначине $x + 2y + 2z = 0$.

   а) Наћи неке базе, као и димензије векторских простора W и $W^\perp$.

   б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v = (1, 0, 4)$ на просторе W и $W^\perp$. Ком од простора W и $W^\perp$ је вектор v ближи?

2. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са
   $L(x, y, z, t) = (x - y + z - t, 2x - y - z + 2t, 3x - z - t)$.
   Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база векторских простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$.
   Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике пресликавања L.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са
   $L(x, y, z) = (x - 2y + z, -x + 3y + 2z, x - y + 5z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

4. Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} -2 & 6 & 6 & 8 \\ -1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ -7 & 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}$.

5. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -2 & 7 & -6 \\ -2 & 8 & -7 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Одредити формулу за A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, други колоквијум 22.12.2013.

Друга група

1. Дат је векторски простор $W \subseteq \mathbb{R}^3$ решења једначине $2x - y - 2z = 0$.

   а) Наћи неке базе, као и димензије векторских простора W и $W^\perp$.

   б) Одредити ортогоналне пројекције вектора $v = (0, 1, 4)$ на просторе W и $W^\perp$. Ком од простора W и $W^\perp$ је вектор v ближи?

2. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са
   $L(x, y, z, t) = (-x + y - z + t, x - 2y - 2z + t, x + 2y - 2t)$.
   Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база векторских простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$.
   Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике пресликавања L.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са
   $L(x, y, z) = (-x + y + 2z, -x + 2y - z, -x + 2y - 2z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

4. Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} -2 & 6 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ -6 & 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}$.

5. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 10 & 5 & -4 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$. Одредити формулу за A^n, $n \in \mathbb{N}$.