Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 01.09.2013.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & + & 4t & = & -5 \\ 2x & + & 14y & + & 5z & - & 8t & = & -3 \\ x & + & 10y & + & 3z & - & 7t & = & 5 \\ -3x & - & 8y & - & 6z & - & 17t & = & 12. \end{array}$$

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима
$$\begin{array}{llll} u_1 = (1, 2, 3, 4), & w_1 = (7, -4, -4, -4), \\ u_2 = (-2, -5, 3, -1), & w_2 = (4, 0, -2, -1), \\ u_3 = (-2, -4, -6, -8), & w_3 = (3, -1, 2, 0), \\ u_4 = (3, 10, 2, 2); & w_4 = (2, 1, 1, 1). \end{array}$$
Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x, y, z) = (x - y + 3z, 2x - 3y, -2x + 2y - 5z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

   в) Одредити $Ker(L^{-1})$ и $Im(L)$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима $f_1 = (1, 0, 1, 1, 1)$, $f_2 = (-1, 2, 3, 3, 7)$ и $f_3 = (1, 2, 8, 6, 9)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неку ортонормирану базу за V.

6. Дат је векторски простор W решења једначине $x + 2y + z = 0$ у $\mathbb{R}^3$.

   а) Наћи базу и димензију векторског простора W.

   б) Наћи базу и димензију векторског простора $W^{\perp}$.

   в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (-3, 4, 7)$ на простор W, као и растојање вектора v од векторског простора W.