Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, први колоквијум 01.12.2012.

прва група

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & y & + & 2z & & & = & 16 \\ x & + & y & - & z & - & 2t & = & 3 \\ 2x & - & y & + & z & - & t & = & 9 \\ 2x & & & - & z & - & 4t & = & 5 \end{array}.$$

Решење: Систем ћемо решити Гаусовим методом елиминације:

(*i*) Маркирамо неку променљиву (нпр. x), у некој једначини (нпр. другој).

(*ii*) Том једначином елементарним операцијама поништавамо ту променљиву у осталим једначинама.

(*iii*) Једначину у којој смо маркирали променљиву памтимо, а даље решавамо систем са једном променљивом и једном једначином мање. (Када њега решимо нпр. по y, z и t, x ћемо израчунати из једначине у којој смо га маркирали.)

(*iv*) Када завршимо са поништавањем, оно што нисмо маркирали прогласимо за параметар (нпр. $t = a, a \in \mathbb{R}$) јер је оно потпуно произвољно, а потом рачунамо уназад оно што смо маркирали.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrll}
3x & - & y & + & 2z & & & = & 16 & \Lsh & \\
x & + & y & - & z & - & 2t & = & 3 & \hookleftarrow & \\
2x & - & y & + & z & - & t & = & 9 & & \\
2x & & & - & z & - & 4t & = & 5 & & \\ \hline
\boxed{x} & + & y & - & z & - & 2t & = & 3 & / \cdot (-3) & / \cdot (-2) \\
3x & - & y & + & 2z & & & = & 16 & \hookleftarrow + & \\
2x & - & y & + & z & - & t & = & 9 & & \hookleftarrow + \\
2x & & & - & z & - & 4t & = & 5 & & \hookleftarrow + \\ \hline
\boxed{x} & + & y & - & z & - & 2t & = & 3 & & \\
 & - & 4y & + & 5z & + & 6t & = & 7 & & \Lsh \\
 & - & 3y & + & 3z & + & 3t & = & 3 & / : (-3) & \hookleftarrow \\
 & - & 2y & + & z & & & = & -1 & & \\ \hline
\boxed{x} & + & y & - & z & - & 2t & = & 3 & & \\
 & & \boxed{y} & - & z & - & t & = & -1 & / \cdot 4 & / \cdot 2 \\
 & - & 4y & + & 5z & + & 6t & = & 7 & \hookleftarrow + & \\
 & - & 2y & + & z & & & = & -1 & & \hookleftarrow + \\ \hline
\boxed{x} & + & y & - & z & - & 2t & = & 3 & & \\
 & & \boxed{y} & - & z & - & t & = & -1 & & \\
 & & & & \boxed{z} & + & 2t & = & 3 & / & \\
 & & & - & z & - & 2t & = & -3 & \hookleftarrow + & \\ \hline
\boxed{x} & + & y & - & z & - & 2t & = & 3 & & \\
 & & \boxed{y} & - & z & - & t & = & -1 & & \\
 & & & & \boxed{z} & + & 2t & = & 3 & & \\
 & & & & & & 0 & = & 0 & &
\end{array}$$

$\Rightarrow \underline{t = a, a \in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow \underline{z} = 3 - 2t = \underline{3 - 2a}$

$\Rightarrow \underline{y} = -1 + z + t = -1 + (3 - 2a) + a = \underline{2 - a}$

$\Rightarrow \underline{x} = 3 - y + z + 2t = 3 - (2 - a) + (3 - 2a) + 2a = \underline{a + 4}$

$\Rightarrow \boxed{(x, y, z, t) = (a + 4, -a + 2, -2a + 3, a), a \in \mathbb{R}}.$

2. Одредити инверз матрице: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ -3 & -5 & 8 & 7 \\ -1 & -1 & 5 & 4 \\ -5 & -12 & 2 & 8 \end{bmatrix}$.

Решење:

$$[A|E] = \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} \boxed{1} & 2 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 8 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -12 & 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{lll} / \cdot 3 & / & / \cdot 5 \\ \hookleftarrow + & & \\ & \hookleftarrow + & \\ & & \hookleftarrow + \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} \boxed{1} & 2 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{ll} / \cdot (-1) & / \cdot 2 \\ \hookleftarrow + & \\ & \hookleftarrow + \\ & \Lsh + \\ \Lsh + & \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} \boxed{1} & 2 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -11 & 11 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ / \cdot 4 \\ \hookleftarrow + \end{array} \sim \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} \boxed{1} & 2 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{lll} & & \\ & & \\ \Lsh + & & \\ / \cdot (-3) & / \cdot 2 & / \cdot 3 \end{array}$$

Како матрица A има линеарно независне врсте, максималног је ранга (4) па је и инверзибилна.

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 2 & -2 & 0 & 10 & -6 & 12 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 9 & -3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -11 & 5 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \quad /\cdot(-2) \quad /\cdot 2 \quad \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & -12 & 4 & -10 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 31 & -13 & 30 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -11 & 5 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \; /\cdot 2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -74 & 30 & -70 & -19 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 31 & -13 & 30 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -11 & 5 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] = [E \mid A^{-1}] \quad .$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} -74 & 30 & -70 & -19 \\ 31 & -13 & 30 & 8 \\ -11 & 5 & -11 & -3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}}$$

3. Нека је $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a + 3b - 5c = 0\}$.

а) Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^3$ и одредити му базу и димензију.

б) Ако је $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = c = 0\}$, доказати да је $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Решење:

а) Очигледно је $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

1) Нула вектор векторског простора $\mathbb{R}^3$ ($\mathbf{0_V} = (0,0,0)$) припада скупу U јер је $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0$.

2) Проверавамо да ли је за произвољна два вектора $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ из скупа U, њихов збир $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ је такође у U:

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3, 2u_1 + 3u_2 - 5u_3 = 0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3, 2v_1 + 3v_2 - 5v_3 = 0 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3) \in U \;\Leftrightarrow\; 2(u_1+v_1) + 2(u_2+v_2) - 5(u_3+v_3) = 0 \tag{3}$$

$(1)+(2)$ даје $(2u_1 + 3u_2 - 5u_3) + (2v_1 + 3v_2 - 5v_3) = 0$, што је због осоцијатиности и комутативности сабирања у $\mathbb{R}$, као и дистрибутивности множења према сабирању у $\mathbb{R}$ еквивалентно са $2(u_1+v_1) + 2(u_2+v_2) - 5(u_3+v_3) = 0$. Зато је десна страна еквиваленције (3) тачна, па је тачна и лева, тј. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in U$.

3) Проверавамо да ли је за произвољан вектор $\boldsymbol{u}$ из скупа U, и за произвољан скалар $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\boldsymbol{u}$ је такође у U:

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3, 2u_1 + 3u_2 - 5u_3 = 0 \tag{4}$$

$$\alpha\boldsymbol{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3) \in U \;\Leftrightarrow\; 2(\alpha u_1) + 3(\alpha u_2) - 5(\alpha u_3) = 0 \tag{5}$$

$\alpha \cdot (4)$ даје $\alpha(2u_1 + 3u_2 - 5u_3) = 0$, што је због дистрибутивности множења према сабирању у $\mathbb{R}$, као и комутативности и асоцијативности множења у $\mathbb{R}$ еквивалентно са $2(\alpha u_1) + 3(\alpha u_2) - 5(\alpha u_3) = 0$. Зато је десна страна еквиваленције (5) тачна, па је тачна и лева, тј. $\alpha\boldsymbol{u} \in U$.

Дакле, $U \leq \mathbb{R}^3$.

Нађимо базу векторског простора U.
$U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a + 3b - 5c = 0\} = \{(-\frac{3}{2}b + \frac{5}{2}c, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\} = \{b(-\frac{3}{2}, 1, 0) + c(\frac{5}{2}, 0, 1) \mid b, c \in \mathbb{R}\} = \Im(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, где је $\boldsymbol{e}_1 = (-\frac{3}{2}, 1, 0)$ и $\boldsymbol{e}_2 = (\frac{5}{2}, 0, 1)$. Дакле скуп $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ је једна генератриса векторског простора U.
Како су вектори $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ линеарно независни (не постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ тд. $\boldsymbol{e}_1 = \lambda\boldsymbol{e}_2$), то је скуп вектора
$\boxed{\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\} \text{ једна база векторског простора } U}$ и $\boxed{\dim U = 2}$.

б) $\mathbb{R}^3 = U \oplus W \;\Leftrightarrow\; (\mathbb{R}^3 = U + W) \wedge (U \cap W = \{\mathbf{0_V}\})$.

1) $\mathbb{R}^3 = U + W \;\Leftrightarrow\; (\mathbb{R}^3 \subseteq U + W) \wedge (U + W \subseteq \mathbb{R}^3)$

$\boxed{U + W \subseteq \mathbb{R}^3}$ Како је збир два вектора из $\mathbb{R}^3$ вектор из $\mathbb{R}^3$, инклузија директно следи.

$\boxed{\mathbb{R}^3 \subseteq U + W}$ Треба показати да произвољан вектор $\boldsymbol{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ припада скупу $U + W = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W\}$.
Вектор $\boldsymbol{v}$ ће припадати скупу $U + W$ ако и само ако постоје вектори $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in U$ и $\boldsymbol{w} = (v_1, v_2, v_3) \in W$ тд. је $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$. Нађимо их.
$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \;\Leftrightarrow\; (a,b,c) = (u_1, u_2, u_3) + (w_1, w_2, w_3)$,
$\boldsymbol{u} \in U \;\Leftrightarrow\; 2u_1 + 3u_2 - 5u_3 = 0$,
$\boldsymbol{w} \in W \;\Leftrightarrow\; w_2 = w_3 = 0$.
Решавањем система

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl}
u_1 & & & & & + & w_1 & & & & & = & a\\
& & u_2 & & & & & + & w_2 & & & = & b\\
& & & & u_3 & & & & & + & w_3 & = & c\\
2u_1 & + & 3u_2 & - & 5u_3 & & & & & & & = & 0\\
& & & & & & & & w_2 & & & = & 0\\
& & & & & & & & & & w_3 & = & 0
\end{array}$$

добијамо $(u_1,u_2,u_3)=(\frac{5c-3b}{2},b,c)$ и $(w_1,w_2,w_3)=(\frac{2a+3b-5c}{2},0,0)$, чима је показана егзистенција вектора $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$, за сваки вектор $\boldsymbol{v}$, тд. је $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$.
Дакле, $\mathbb{R}^3=U+W$.

2) $U\cap W=\{(a,b,c)\mid 2a+3b-5c=0, b=c=0\}=\{(a,b,c)\mid a=b=c=0\}=\{(0,0,0)\}=\{\mathbf{0}_{\mathbf{V}}\}$.

Дакле, $\mathbb{R}^3=U\oplus W$.

4. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима

$$\begin{array}{lcl lcl}
u_1 & = & (2,\ -2,\ \ 3,\ 4), & w_1 & = & (1,\ 0,\ 2,\ 1),\\
u_2 & = & (1,\ -1,\ -1,\ 2), & w_2 & = & (1,\ 1,\ 2,\ 1),\\
u_3 & = & (1,\ -1,\ \ 2,\ 3), & w_3 & = & (2,\ 3,\ 4,\ 2).\\
u_4 & = & (3,\ -3,\ \ 7,\ 6), & & &
\end{array}$$

Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U\cap W$.

Решење:

- $U=\Im(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4)$. Да би одредили базу векторског простора U из генетартирсе $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4\}$ треба издвојити линеарно независне векторе.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 3 & -3 & 7 & 6 \end{bmatrix}
\begin{array}{llll} \boldsymbol{u}_2 & /\cdot(-2) & /\cdot(-1) & /\cdot(-3)\\ \boldsymbol{u}_1 & \hookleftarrow + & & \\ \boldsymbol{u}_3 & & \hookleftarrow + & \\ \boldsymbol{u}_4 & & & \hookleftarrow + \end{array}
\sim
\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{lll} \boldsymbol{u}_2 & & \\ \boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2 & /\cdot(-\frac{3}{5}) & /\cdot(-2)\\ \boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_2 & \hookleftarrow + & \\ \boldsymbol{u}_4-3\boldsymbol{u}_2 & & \hookleftarrow + \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \boldsymbol{u}_2\\ \boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2\\ \boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_2-\frac{3}{5}(\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2)\\ \boldsymbol{u}_4-3\boldsymbol{u}_2-2(\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2)=\boldsymbol{u}_4+\boldsymbol{u}_2-2\boldsymbol{u}_1 \end{array}$$

Како је $\boldsymbol{u}_4=-\boldsymbol{u}_2+2\boldsymbol{u}_1$, то је $U=\Im(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4)=\Im(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$. С обзиром да је $\boxed{\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}}$ скуп од три линеарно независна вектора, то је и једна база векторског простора U и $\boxed{\dim U=3}$.
Једна база од U је и скуп вектора $\boxed{\{(1,-1,-1,2),(0,0,5,0),(0,0,0,1)\}}$.

- $W=\Im(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3)$. Да би одредили базу векторског простора W из генетартирсе $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$ треба издвојити линеарно независне векторе.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}
\begin{array}{lll} \boldsymbol{w}_1 & /\cdot(-1) & /\cdot(-2)\\ \boldsymbol{w}_2 & \hookleftarrow + & \\ \boldsymbol{w}_3 & & \hookleftarrow + \end{array}
\sim
\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 1\\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{ll} \boldsymbol{w}_1 & \\ \boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_1 & /\cdot(-3)\\ \boldsymbol{w}_3-2\boldsymbol{w}_1 & \hookleftarrow + \end{array}
\sim$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 1\\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{l} \boldsymbol{w}_1\\ \boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_1\\ \boldsymbol{w}_3-2\boldsymbol{w}_1-3(\boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_1)=\boldsymbol{w}_3-3\boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{w}_1 \end{array}$$

Како је $\boldsymbol{w}_3=3\boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_1$, то је $W=\Im(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3)=\Im(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2)$. С обзиром да је $\boxed{\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}}$ скуп од два линеарно независна вектора, то је и једна база векторског простора W и $\boxed{\dim W=2}$.
Једна база од W је и скуп вектора $\boxed{\{(1,0,2,1),(0,1,0,0)\}}$.

- $U+W=\Im(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)+\Im(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2)\overset{\text{ЛЕМА}}{=}\Im(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2)$ Да би одредили базу векторског простора $U+W$ из генетартирсе $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2\}$ треба издвојити линеарно независне векторе.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 3 & 4\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}
\begin{array}{lll} \boldsymbol{u}_2 & /\cdot(-2) & /\cdot(-1)\\ \boldsymbol{u}_1 & \hookleftarrow + & \\ \boldsymbol{u}_3 & & \hookleftarrow +\\ \boldsymbol{w}_1 & & \hookleftarrow +\\ \boldsymbol{w}_2 & & \hookleftarrow + \end{array}
\sim
\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}
\begin{array}{ll} \boldsymbol{u}_2 & \\ \boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2 & /:5\\ \boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_2 & \\ \boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{u}_2 & \\ \boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{u}_2 & \end{array}
\sim$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}
\begin{array}{ll} \boldsymbol{u}_2 & \\ \frac{1}{5}(\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2) & /\cdot(-3)\\ \boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_2 & \hookleftarrow +\\ \boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{u}_2 & \hookleftarrow +\\ \boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{u}_2 & \hookleftarrow + \end{array}
\sim
\begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1}\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\begin{array}{ll} \boldsymbol{u}_2 & \\ \frac{1}{5}(\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2) & \\ \boldsymbol{u}_3-\boldsymbol{u}_2-\frac{3}{5}(\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2) & /\\ \boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{u}_2-\frac{3}{5}(\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2) & \hookleftarrow +\\ \boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{u}_2-\frac{3}{5}(\boldsymbol{u}_1-2\boldsymbol{u}_2) & \hookleftarrow + \end{array}
\sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \boldsymbol{u}_2 \\ \frac{1}{5}(\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2) \\ \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_2 - \frac{3}{5}(\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2) \\ \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{u}_3 + \frac{2}{5}\boldsymbol{u}_2 - \frac{6}{5}\boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \frac{2}{5}\boldsymbol{u}_2 - \frac{6}{5}\boldsymbol{u}_1 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ / \cdot (-2) \\ \lrcorner + \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc} \boxed{1} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \boldsymbol{u}_2 \\ \frac{1}{5}(\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2) \\ \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{u}_2 - \frac{3}{5}(\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2) \\ \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{u}_3 + \frac{2}{5}\boldsymbol{u}_2 - \frac{6}{5}\boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{w}_2 - 2\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{u}_3 - \frac{2}{5}\boldsymbol{u}_2 + \frac{6}{5}\boldsymbol{u}_1 \end{array}$$

Како је

$$\boldsymbol{w}_2 = 2\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{u}_3 + \tfrac{2}{5}\boldsymbol{u}_2 - \tfrac{6}{5}\boldsymbol{u}_1, \tag{6}$$

то је $U+W = \Im(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) = \Im(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1)$. С обзиром да је $\boxed{\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1\}}$ скуп од четири линеарно независна вектора, то је и једна база векторског простора $U+W$ и $\boxed{\dim U + W = 4}$.

Једна база од $U+W$ је и скуп вектора $\boxed{\{(1,-1,-1,2),(0,0,5,0),(0,0,0,1),(0,1,0,0)\}}$.

Како је $U+W \leq \mathbb{R}^4$ и $\dim U+W = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, можемо закључити да је $U+W = \mathbb{R}^4$. За базу од $U+W$ можемо узети и канонску базу векторског простора $\mathbb{R}^4$.

- По Грасмановој формули

$$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W,$$

добијамо да је $\boxed{\dim U \cap W = 3 + 2 - 4 = 1}$. Да би нашли базу, треба наћи један ненула вектор у пресеку векторских простора U и W.

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{x} \in U \cap W & \Leftrightarrow & \boldsymbol{x} \in U \quad \wedge \quad \boldsymbol{x} \in W \\ & \Leftrightarrow & \boldsymbol{x} \in \Im(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) \quad \wedge \quad \boldsymbol{x} \in \Im(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) \\ & \Leftrightarrow & \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 + \gamma\boldsymbol{u}_3,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \boldsymbol{x} = \delta\boldsymbol{w}_1 + \theta\boldsymbol{w}_2,\ \delta, \theta \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Треба наћи $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta \in \mathbb{R}$ тако да је: $\alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 + \gamma\boldsymbol{u}_3 = \delta\boldsymbol{w}_1 + \theta\boldsymbol{w}_2$, тј.
$\alpha(2,-2,3,4) + \beta(1,-1,-1,2) + \gamma(1,-1,2,3) = \delta(1,0,2,1) + \theta(1,1,2,1)$.

Проблем се своди на решавање система једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & \delta & + & \theta \\ -2\alpha & - & \beta & - & \gamma & = & & & \theta \\ 3\alpha & - & \beta & + & 2\gamma & = & 2\delta & + & 2\theta \\ 4\alpha & + & 2\beta & + & 3\gamma & = & \delta & + & \theta. \end{array}$$

Решење система је $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta) = (-\frac{6}{5}\theta, \frac{2}{5}\theta, \theta, -2\theta, \theta), \theta \in \mathbb{R}$.

Скуп вектора у пресеку векторских простора U и W је дакле, $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{u}_1 + \beta\boldsymbol{u}_2 + \gamma\boldsymbol{u}_3 = \delta\boldsymbol{w}_1 + \theta\boldsymbol{w}_2$, односно, $\boldsymbol{x} = \delta\boldsymbol{w}_1 + \theta\boldsymbol{w}_2 = -2\theta\boldsymbol{w}_1 + \theta\boldsymbol{w}_2 = \theta(-2\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \theta(-1,1,-2,1)$. $U \cap W$ је зато генерисан вектором $(-1,1,-2,1)$, а како је $\dim U \cap W = 1$, његова база је $\boxed{\{(-1,1,-2,-1)\}}$.

Приметимо да смо један прсечни ненула вектор могли да одредимо и из једнакости (6). Како је $\boldsymbol{w}_2 - 2\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_3 + \frac{2}{5}\boldsymbol{u}_2 - \frac{6}{5}\boldsymbol{u}_1$, то је пресечни вектор једнак $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}_2 - 2\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_3 + \frac{2}{5}\boldsymbol{u}_2 - \frac{6}{5}\boldsymbol{u}_1 = (-1,1,-2,-1)$.

5. Нека је A матрица из другог задатка.

   а) Одредити матрицу $M = A^T A$.

   б) Одредити ранг матрице A^T.

Решење:

а) Компонента на позицији (i,j) у резултату се рачуна као скаларни производ вектора који се налази у i-тој врсти прве матрице и вектора који се налази у j-тој колони друге матрице.

$$M = A^T A = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -1 & -5 \\ 2 & -5 & -1 & -12 \\ -2 & 8 & 5 & 2 \\ -3 & 7 & 4 & 8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -2 & -3 \\ -3 & -5 & 8 & 7 \\ -1 & -1 & 5 & 4 \\ -5 & -12 & 2 & 8 \end{array}\right] = \boxed{\left[\begin{array}{cccc} 36 & 78 & -41 & -68 \\ 78 & 174 & -73 & -141 \\ -41 & -73 & 97 & 98 \\ -68 & -141 & 98 & 138 \end{array}\right]}.$$

б) У другом задатку је показано да матрица A има 4 линеарно независне врсте. Зато матрица A^T има 4 линеарно независне колоне, па је она $\boxed{\text{ранга 4}}$. $(rang(A) = rang(A^T))$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, први колоквијум 01.12.2012.

друга група

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$: $\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & 3z & + & t & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 5z & & & = & 3 \\ x & & & + & 2z & - & t & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & 8z & + & t & = & 6 \end{array}$.

Решење: $\boxed{(x,y,z,t) = (a-2b, 3-b-2a, b, a), a, b \in \mathbb{R}.}$

2. Одредити инверз матрице: $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -5 \\ 2 & -5 & -1 & -12 \\ -2 & 8 & 5 & 2 \\ -3 & 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Решење: $\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} -74 & 31 & -11 & 3 \\ 30 & -13 & 5 & -2 \\ -70 & 30 & -11 & 4 \\ -19 & 8 & -3 & 1 \end{bmatrix}}$

3. Нека је $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a+b+c = 0, a+2b+c = 0\}$.

а) Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^3$ и одредити му базу и димензију.

б) Ако је $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 0\}$, доказати да је $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

Решење: ...

Једна база векторског простора U је скуп $\boxed{\{(1,1,-3)\}}$, $\boxed{\dim U = 1}$.

...

4. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима

$$\begin{array}{lcrrrrlcrrrr} u_1 & = & (1, & 0, & 3, & 2), & w_1 & = & (3, & 4, & -3, & -3), \\ u_2 & = & (2, & -1, & 5, & 5), & w_2 & = & (4, & 3, & -1, & 0), \\ u_3 & = & (-1, & 1, & -2, & -3), & w_3 & = & (-2, & -5, & 5 & 6). \\ u_4 & = & (0, & 1, & 1, & -1), & & & & & & \end{array}$$

Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

Решење:

- Једна база векторског простора U је скуп $\boxed{\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}}$, $\boxed{\dim U = 2}$.
- Једна база векторског простора W је скуп $\boxed{\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}}$, $\boxed{\dim W = 2}$.
- Једна база векторског простора $U+W$ је скуп $\boxed{\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1\}}$, $\boxed{\dim U + W = 3}$.
- Једна база векторског простора $U \cap W$ је скуп $\boxed{\{(1,-1,2,3)\}}$, $\boxed{\dim U \cap W = 1}$.

5. Нека је A матрица из другог задатка.

а) Одредити матрицу $M = A^T A$.

б) Одредити ранг матрице A^T.

Решење:

а) $M = A^T A = \boxed{\begin{bmatrix} 18 & 50 & -25 & -57 \\ -50 & 147 & 76 & 147 \\ -25 & 76 & 43 & 59 \\ -57 & 147 & 59 & 237 \end{bmatrix}}$.

б) $\boxed{rang(A^T) = 4}$.