Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 2.6.2013.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$: $\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & + & 4z & + & 2t & = & 10 \\ 2x & + & y & + & 3z & + & t & = & 7 \\ -x & + & y & & & - & 2t & = & -2 \\ x & + & y & + & 2z & & & = & 4 \end{array}$.

2 Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима

$$\begin{array}{lcl} u_1 = (2, 3, 0, 3), & & w_1 = (1, 3, 5, -2), \\ u_2 = (1, 2, 1, 1), & & w_2 = (1, 3, 3, 0), \\ u_3 = (3, 4, -1, -5), & & w_3 = (1, 0, -3, 3), \\ & & w_4 = (0, -1, -2, 1). \end{array}$$

Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x, y, z) = (2x + 2y + z, 3x + 2y + z, x + y + z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

   в) Одредити $Ker(L^{-1})$ и $Im(L)$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -5 & -12 & -4 \\ 2 & 9 & 4 \\ -6 & -12 & -3 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (-3, 1, -1, 5)$, $f_2 = (1, 1, -5, 21)$ и $f_3 = (-15, 7, 5, 5)$.
Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^{\perp}$.

6. Дат је векторски простор W решења једначине $2x - y + z = 0$.

   а) Наћи базу и димензију векторског простора W.

   б) Наћи базу и димензију векторског простора $W^{\perp}$.

   в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (1, -1, 2)$ на простор W, као и растојање вектора v од векторског простора W.