Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 18.01.2013.

$\boxed{1.}$ Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$: $\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 3y & + & z & + & 5t & + & w & = & 5 \\ & & y & + & z & + & 2t & + & w & = & 4 \\ 2x & + & 4y & & & + & 7t & + & w & = & 3 \\ & - & 2y & + & 2z & - & 3t & - & w & = & 7 \end{array}$.

$\boxed{2.}$ Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима

$$\begin{array}{lll} u_1 = (1, 2, 3, 4), & & w_1 = (7, -4, -4, -4), \\ u_2 = (-2, -5, 3, -1), & & w_2 = (4, 0, -2, -1), \\ u_3 = (-2, -4, -6, -8), & & w_3 = (3, -1, 2, 0), \\ u_4 = (3, 10, 2, 2); & & w_4 = (2, 1, 1, 1). \end{array}$$

Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x,y,z) = (2x-2y+3z, 2x-y+2z, -x+y-z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

   в) Одредити $Ker(L^{-1})$ и $Im(L)$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -6 \\ -12 & 9 & -12 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (-3,1,-1,5)$, $f_2 = (1,1,-5,21)$ и $f_3 = (-15,7,5,5)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^{\perp}$.

6. Дат је векторски простор W решења једначине $x+y+z=0$.

   а) Наћи базу и димензију векторског простора W.

   б) Наћи базу и димензију векторског простора $W^{\perp}$.

   в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (-1,1,3)$ на простор W, као и растојање вектора v од векторског простора W.

$\boxed{7.}$ Одредити инверз матрице: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 8 & 11 \\ -3 & -6 & -8 & -10 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

$\boxed{8.}$ Нека је $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+2b+3c=0\}$.

   а) Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^3$ и одредити му базу и димензију.

   б) Ако је $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid -a-b+c=0,\ -5a+b+c=0\} \leqslant \mathbb{R}^3$, испитати да ли је $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

$\boxed{9.}$ Одредити ранг матрице $M = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} 7 & -4 & -4 & -4 \\ 4 & 0 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Напомена:

- Задаци 1.-6. чине писмени испит.
- Задаци 1. 2. 7. 8. и 9. чине I колоквијум.
- Задаци 3. 4. 5. 6. и 10. чине II колоквијум.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 18.01.2013.

$\boxed{1.}$ Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$: $\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 1 \\ 2x & + & 7y & + & 8z & + & 11t & = & 2 \\ -3x & - & 6y & - & 8z & - & 10t & = & 3 \\ x & + & 3y & + & 4z & + & 6t & = & 4 \\ 4x & + & 9y & + & 11z & + & 14t & = & -2 \end{array}$.

$\boxed{2.}$ Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима

$$\begin{array}{llll} u_1 = (1, 2, 2, -1), & & w_1 = (2, 1, 1, 1), \\ u_2 = (3, 5, 10, -1), & & w_2 = (4, 0, -2, -1), \\ u_3 = (0, -1, 4, 2); & & w_3 = (7, -4, -4, -4), \\ & & w_4 = (3, -1, 2, 0). \end{array}$$

Наћи бар једну базу као и димензију простора U, W, $U+W$ и $U \cap W$.

3. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са $L(x,y,z) = (-x+y-z, y+2z, x+2z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.

   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

   в) Одредити $Ker(L^{-1})$ и $Im(L)$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити A^n.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (-1,1,-3,5)$, $f_2 = (-5,1,1,21)$ и $f_3 = (5,7,-15,5)$. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити неке ортонормиране базе за V и $V^{\perp}$.

6. Дат је векторски простор W решења једначине $x + 2y + 3z = 0$.

   а) Наћи базу и димензију векторског простора W.

   б) Наћи базу и димензију векторског простора $W^{\perp}$.

   в) Одредити ортогоналну пројекцију вектора $v = (-1,4,7)$ на простор W, као и растојање вектора v од векторског простора W.

$\boxed{7.}$ Одредити инверз матрице: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & -6 & 3 \\ 3 & 8 & -8 & 4 \\ 4 & 11 & -10 & 6 \end{bmatrix}$.

$\boxed{8.}$ Нека је $U = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 3b + 2c = 0\}$.

а) Доказати да је U векторски потпростор простора $\mathbb{R}^3$ и одредити му базу и димензију.

б) Ако је $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid -a+b-c=0,\ -5a+b+c=0\} \leqslant \mathbb{R}^3$, испитати да ли је $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

$\boxed{9.}$ Одредити ранг матрице $M = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 & -1 \\ 7 & -4 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Напомена:

- Задаци 1.-6. чине писмени испит.
- Задаци 1. 2. 7. 8. и 9. чине I колоквијум.
- Задаци 3. 4. 5. 6. и 10. чине II колоквијум.