

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 10.02.2013.

1. Нека је $U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - 2b + 3c = 0\}$.

а) Доказати да је U векторски потпростор од $V = \mathbb{R}^3$.

б) Одредити базу и димензију векторског простора U .

в) Одредити базу и димензију векторског простора $U^\perp$.

г) Нека је $\mathbf{v} = (3, 5, -7)$. Одредити угао између вектора $\mathbf{v}$ и векторског простора U , пројекцију $\mathbf{v}$ на U , као и одстојање $\mathbf{v}$ од U .

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима

$$u_1 = (1, 2, -1, 1), \quad w_1 = (2, 3, 3, 7),$$

$$u_2 = (3, 4, 1, 2), \quad w_2 = (-1, -2, 0, 1),$$

$$u_3 = (5, 8, -1, 4); \quad w_3 = (1, 2, -1, 1),$$

$$w_4 = (2, 3, 4, 5).$$

Наћи бар једну базу као и димензију простора U , W , $U + W$ и $U \cap W$.

$$x + y + z + t = 4$$

$$2x - y + z - t = 1$$

3. Решити систем једначина:

$$z + t = 2$$

$$3x + 2z = 5$$

$$5x - y + 3z - t = 6.$$

4. Нека је векторски простор V генерисан векторима $\mathbf{f}_1 = (-3, 1, 1, 5)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1, -5, 21)$ и $\mathbf{f}_3 = (-15, 7, 5, 5)$.

Одредити ортонормиране базе за V и $V^\perp$.

5. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & -12 \\ 6 & 9 & -11 \end{bmatrix}$.

Испитати да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици и, ако јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити инверз матрице P , као и матрицу A^n , $n \in \mathbb{N}$.

6. Израчунати детерминанту:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & -6 & 3 \\ 3 & 8 & -8 & 4 \\ 4 & 11 & -10 & 6 \end{vmatrix}.$$

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 10.02.2013.

1. Нека је $U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - 2b + 3c = 0\}$.

а) Доказати да је U векторски потпростор од $V = \mathbb{R}^3$.

б) Одредити базу и димензију векторског простора U .

в) Одредити базу и димензију векторског простора $U^\perp$.

г) Нека је $\mathbf{v} = (3, 5, -7)$. Одредити угао између вектора $\mathbf{v}$ и векторског простора U , пројекцију $\mathbf{v}$ на U , као и одстојање $\mathbf{v}$ од U .

2. Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима

$$u_1 = (1, 2, -1, 1), \quad w_1 = (2, 3, 3, 7),$$

$$u_2 = (3, 4, 1, 2), \quad w_2 = (-1, -2, 0, 1),$$

$$u_3 = (5, 8, -1, 4); \quad w_3 = (1, 2, -1, 1),$$

$$w_4 = (2, 3, 4, 5).$$

Наћи бар једну базу као и димензију простора U , W , $U + W$ и $U \cap W$.

$$x + y + z + t = 4$$

$$2x - y + z - t = 1$$

3. Решити систем једначина:

$$z + t = 2$$

$$3x + 2z = 5$$

$$5x - y + 3z - t = 6.$$

4. Нека је векторски простор V генерисан векторима $\mathbf{f}_1 = (-3, 1, 1, 5)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1, -5, 21)$ и $\mathbf{f}_3 = (-15, 7, 5, 5)$.

Одредити ортонормиране базе за V и $V^\perp$.

5. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & -12 \\ 6 & 9 & -11 \end{bmatrix}$.

Испитати да ли је матрица A слична некој дијагоналној матрици и, ако јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $A = PDP^{-1}$. Одредити инверз матрице P , као и матрицу A^n , $n \in \mathbb{N}$.

6. Израчунати детерминанту:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 7 & -6 & 3 \\ 3 & 8 & -8 & 4 \\ 4 & 11 & -10 & 6 \end{vmatrix}.$$