Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 4.9.2012.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & & + & 2z & + & 4t & = & -8 \\ & & y & - & 3z & - & t & = & 6 \\ 3x & + & 4y & - & 6z & + & 8t & = & 0 \\ & - & y & + & 3z & + & 4t & = & -12. \end{array}$$

2. Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима

$$\begin{array}{lcl} u_1 & = & (1,\ 2,\ \ 0,\ 3) \\ u_2 & = & (1,\ 2,\ \ 2,\ 1) \\ u_3 & = & (2,\ 4,\ -2,\ 8), \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} v_1 & = & (1,\ 2,\ 1,\ \ 2) \\ v_2 & = & (-7,\ 2,\ 2,\ -4) \\ v_3 & = & (-5,\ 6,\ 4,\ \ 0). \end{array}$$

Наћи бар једну базу као и димензију простора U, V, $U+V$ и $U\bigcap V$.

3. Нека је $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ линеарно пресликавање дефинисано са
$L(x,y,z)=(x+y+2z, 3x-2y-4z, 4x-y-2z, x-y-2z)$.
Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра KerL и слике ImL пресликавања L.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A. Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D=P^{-1}AP$.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима
$f_1=(1,-1,1,-1)$, $f_2=(1,1,3,-1)$ и $f_3=(-1,0,1,0)$.
Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V.

6. Нека је W потпростор свих решења система линеарних једначина

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & & & + & t & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & & & = & 0. \end{array}$$

   а) Одредити бар по једну базу и димензију простора W и $W^{\perp}$.

   б) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v=(-6,0,1,1)$ на потпростор W, као и растојање вектора v од потпростора W.