

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 07.10.2012.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}x + 3y + 2z + 4t &= -5 \\ 2x + 14y + 5z - 8t &= -3 \\ x + 10y + 3z - 7t &= 5 \\ -3x - 8y - 6z - 17t &= 12\end{aligned}$$

2. Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима:

$$\begin{aligned}u_1 &= (1, 2, 3, 0) & v_1 &= (3, 0, 4, 3) \\ u_2 &= (1, 3, 2, 2) & v_2 &= (1, 3, 2, 2) \\ u_3 &= (3, 7, 8, 2), & v_3 &= (-2, 3, -2, -1).\end{aligned}$$

Наћи бар једну базу, као и димензију простора U , V , $U + V$ и $U \cap V$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ линеарно пресликавање дефинисано са

$$L(x, y, z) = (x + y + 3z, 2x + 3y + 8z, 3x + 5y + 13z, x - 2y - 3z).$$

а) Наћи матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$.

б) Одредити ранг, дефект и неке базе језгра $\text{Ker} L$ и слике $\text{Im} L$ пресликавања L .

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -2 & -5 & 4 \\ -4 & -12 & 9 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Нека је V потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$f_1 = (3, 5, 1, 1), f_2 = (5, 7, -9, -5) \text{ и } f_3 = (-1, 3, 19, 5).$$

Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V .

6. Дат је векторски простор W решења једначине $3x + y - 4z = 0$ у $\mathbb{R}^3$.

а) Наћи базу и димензију векторског простора W .

б) Наћи базу и димензију векторског простора $W^\perp$.

в) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора

$v = (-2, 0, 5)$ на простор W , као и растојање вектора v од векторског простора W .