

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 24.1.2012.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrrrrr} x & + & 3y & + & z & + & 5t & + & s & = & 5 \\ & & y & + & z & + & 2t & + & s & = & 4 \\ 2x & + & 4y & + & & + & 7t & + & s & = & 3. \end{array}$$

2. Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима

$$\begin{array}{ll} u_1 = (1, 2, 2, -1) & v_1 = (2, 5, 0, -4) \\ u_2 = (3, 5, 10, -1) & v_2 = (0, 2, -8, 3) \\ u_3 = (0, -1, 4, 2), & v_3 = (2, 3, 8, -7). \end{array}$$

Наћи бар једну базу као и димензију простора U , V , $U + V$ и $U \cap V$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са

$$L(x, y, z, t) = (x - 2y + 3t, -3x + 6y + 2z - 11t, 2x - 4y + z + 5t).$$

Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра $\text{Ker} L$ и слике $\text{Im} L$ пресликавања L .

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима

$$f_1 = (1, 1, 1, 1), f_2 = (1, 1, 2, 4) \text{ и } f_3 = (1, 2, -4, -3).$$

Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V .

6. Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора

$v = (3, 1, 5, 1)$ на потпростор U векторског простора $\mathbb{R}^4$ који је генерисан векторима $e_1 = (3, 1, -1, 1)$ и $e_2 = (1, -1, 1, -1)$.

Затим израчунати растојање вектора v од потпростора U .