Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, 27.02.2012.

1. Решити систем линеарних једначина над пољем $\mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 4y & + & 4z & + & 2t & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & 2z & + & t & = & 2 \\ -4x & - & 2y & & & & & = & -4 \\ x & + & 5y & + & 3z & + & 2t & = & -2 \\ 4x & + & 2y & + & 3z & + & t & = & 4. \end{array}$$

2. Нека су U и V потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисани редом векторима:
$$\begin{array}{lll} u_1 = (1,\ 2,\ 1,\ 3) & \qquad & v_1 = (-1,\ -2,\ 3,\ 5) \\ u_2 = (4,\ 7,\ 3,\ 5) & & v_2 = (2,\ 3,\ 1,\ -1) \\ u_3 = (5,\ 8,\ 3,\ 1), & & v_3 = (-2,\ -5,\ 13,\ 19). \end{array}$$
Наћи бар једну базу, као и димензију простора U, V, $U+V$ и $U \cap V$.

3. Нека је $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$ дефинисан са $L(x,y,z) = (x+2y+2z, x+y+z, 3x+y)$.
   а) Наћи матрицу оператора L у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Одредити ранг и дефект оператора L.
   в) Да ли је оператор L инвертибилан? Ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу простора $\mathbb{R}^3$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 10 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A. Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Нека је V потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ генерисан векторима $f_1 = (1,3,5,1)$, $f_2 = (11,1,3,7)$ и $f_3 = (4,-10,-18,8)$.
Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V.

6. Дат је векторски простор W решења једначине $x+2y+z=0$ у $\mathbb{R}^3$.
   а) Наћи базу и димензију векторског простора W.
   б) Наћи базу и димензију векторског простора $W^{\perp}$.
   в) Одредити ортогоналну пројекцију и ортогоналну допуну вектора $v = (-3,4,7)$ на простор W, као и растојање вектора v од векторског простора W.

Резултати

1. $(x, y, z, t) = (\frac{4}{3} - \frac{1}{3}z, -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}z, z, -3z), z \in \mathbb{R}$.

2. Вектори u_1 и u_2 су линеарно независни, док $u_3 \in \Omega(u_1, u_2)$. Следи, $U = \Omega(u_1, u_2, u_3) = \Omega(u_1, u_2)$ и скуп $\{u_1, u_2\}$ је једна база простора U. Тиме је $dimU = 2$.

   Вектори v_1 и v_2 су линеарно независни, док $v_3 \in \Omega(v_1, v_2)$. Следи, $V = \Omega(v_1, v_2, v_3) = \Omega(v_1, v_2)$ и скуп $\{v_1, v_2\}$ је једна база простора V. Тиме је и $dimV = 2$.

   $U + V = \Omega(u_1, u_2, u_3) + \Omega(v_1, v_2, v_3) = \Omega(u_1, u_2) + \Omega(v_1, v_2) = \Omega(u_1, u_2, v_1, v_2)$. Бектори u_1, u_2 и v_1 су линеарно независни, док $v_2 \in \Omega(u_1, u_2, v_1)$. Следи да је скуп $\{u_1, u_2, v_1\}$ једна база простора $U + V$. Тиме је $dim(U + V) = 3$.

   На основу Грасманове формуле $dim(U \cap V) = 1$. Један вектор у пресеку је $x = v_2 = -2u_1 + u_2 = (2, 3, 1, -1)$, и с обзиром да је димензија пресека 1, он чини базу пресека.

3. а) $[L]_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   б) $\rho(L) = 3, \delta(L) = 0$.

   в) Оператор L јесте инвертибилан, и $[L^{-1}]_E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

4. $\varphi_A(t) = -(t-1)^2(t-12), m_A(t) = (t-1)(t-12)$.

   Сопствени вектори за сосптвену вредност $t_1 = 1$ су $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Сопствени вектор за сопствену вредност $t_2 = 12$ је $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Како имамо три линеарно независна спостбена вектора, то је матрица A слична дијагоналној, а тражене матрице су $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ и $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$.

5. $e_1 = \frac{1}{6}(1, 3, 5, 1)$, $e_2 = \frac{1}{6}(5, -1, -1, 3)$ и $e_3 = \frac{1}{6}(-3, 1, -1, 5)$.

6. а) Једна база простора W је $\{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$, а $dimW = 2$.

   б) База простора $W^\perp$ је $\{(1, 2, 1)\}$, а $dimW^\perp = 1$.

   в) Ортогонална пројекција v на W је $w = (-5, 0, 5)$,а ортогонална допуна $w^\perp = (2, 4, 2)$. $d(v, W) = d(v, w) = ||w^\perp|| = 2\sqrt{6}$.