Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, други колоквијум 15.1.2012.

Прва група

1. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са
   $L(x, y, z, t) = (x - y + 5z + 4t, 2x - 2y + 4z + 7t, 3x - 3y + 3z + 10t)$.
   Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра KerL и слике ImL пресликавања L.

2. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са
   $L(x, y, z) = (x - y + 3z, 2x - 3y, -2x + 2y - 5z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

3. Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ -5 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.
   Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
   Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима
   $f_1 = (1, 0, 1, 1, 1),\ f_2 = (-1, 2, 3, 3, 7)$ и $f_3 = (1, 2, 8, 6, 9)$.
   Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V.

Прва група - резултати:

1. $[L]_E^F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 7 \\ 3 & -3 & 3 & 10 \end{bmatrix}$, где је
   $E = \{e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)\}$ и
   $F = \{f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1)\}$.
   Једна база за $KerL$ је $\{(1, 1, 0, 0), (19, 0, 1, -6)\}$, а $\delta(L) = 2$.
   Једна база за ImL је $\{L(e_1) = (1, 2, 3), L(e_3) = (5, 4, 3)\}$, а $\rho(L) = 2$.

2. б) $KerL = \{(0, 0, 0)\}$ па оператор L јесте инвертибилан.
   $[L^{-1}]_E = \begin{bmatrix} -15 & -1 & -9 \\ -10 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. -9

4. $\varphi_A(t) = -(t + 1)^2(t - 4), m_a(t) = (t + 1)(t - 4)$.
   Сопствени вектори за сосптвену вредност $t_1 = -1$ су $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Сопствени вектор за сопствену вредност $t_2 = 4$ је $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Како имамо три линеарно независна вектора, то је матрица A слична дијагоналној, а тражене матрице су $P = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

5. Једна ОНБ за V је $\{(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}})\}$.

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, други колоквијум 15.1.2012.

Друга група

1. Нека је $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање дефинисано са
$L(x, y, z, t) = (x + 3y - z + 4t, 2x + 6y + 2z, x + 3y + 3z - 4t)$.
Одредити матрицу пресликавања L у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Одредити ранг, дефект и неке базе језгра KerL и слике ImL пресликавања L.

2. а) Доказати да је пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са
$L(x, y, z) = (x + 4z, -x + y - z, -x - 3z)$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$.
   б) Испитати да ли је оператор L инвертибилан и ако јесте, одредити матрицу оператора L^{-1} у односу на канонску базу e простора $\mathbb{R}^3$.

3. Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

4. Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.
Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A.
Испитати да ли је матрица A слична дијагоналној и у случају да јесте, наћи бар једну инвертибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D = P^{-1}AP$.

5. Нека је V потпростор простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима
$f_1 = (2, 2, 1, 0, 0)$, $f_2 = (5, 3, 2, 1, 1)$ и $f_3 = (2, -5, -3, 2, 3)$.
Грам-Шмитовим поступком ортогонализације одредити ортонормирану базу за V.

Друга група - резултати:

1. $[L]_E^F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, где је
$E = \{e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)\}$ и
$F = \{f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1)\}$.
Једна база за $KerL$ је $\{(-2, 0, 2, 1), (-3, 1, 0, 0)\}$, а $\delta(L) = 2$.
Једна база за ImL је $\{L(e_1) = (1, 2, 1), L(e_3) = (-1, 2, 3)\}$, а $\rho(L) = 2$.

2. б) $KerL = \{(0, 0, 0)\}$ па оператор L јесте инвертибилан.
$[L^{-1}]_E = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. -3

4. $\varphi_A(t) = -(t - 3)(t - 2)^2, m_a(t) = (t - 3)(t - 2)$.
Сопствени вектори за соcптвену вредност $t_1 = 2$ су $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Сопствени вектор за сопствену вредност $t_2 = 3$ је $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Како имамо три линеарно независна вектора, то је матрица A слична дијагоналној, а тражене матрице су $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ и $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. Једна ОНБ за V је $\{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0)\}$.