3. Одредити карактеристични и минимални полином матрице

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -6 & -3\\ 3 & 8 & 3\\ -6 & -12 & -4\end{bmatrix}$$

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A. Испитати да ли је матрица A дијагоналног типа и ако јесте одредити инверзибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D тако да је $A=P^{-1}DP$.

КАРАКТЕРИСТИЧНИ ПОЛИНОМ:

$$\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}-1-t & -6 & -3\\ 3 & 8-t & 3\\ -6 & -12 & -4-t\end{vmatrix} = -(1+t)\begin{vmatrix}8-t & 3\\ -12 & -4-t\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}3 & 3\\ -6 & -4-t\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}3 & 8-t\\ -6 & -12\end{vmatrix}=$$

$$=-(1+t)\left((8-t)(-4-t)+36\right)+6(-12-3t+18)-3(-36+48-6t)=$$

$$=-(1+t)(t^2-4t+4)$$

$$=-(t+1)(t-2)^2$$

МИНИМАЛНИ ПОЛИНОМ:

кандидати $(t+1)(t-2)$ или $(t+1)(t-2)^2$

$p(t)=(t+1)(t-2)$

$$p(A)=(A+I)(A-2I)=\begin{bmatrix}0 & -6 & -3\\ 3 & 9 & 3\\ -6 & -12 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & -6 & -3\\ 3 & 6 & 3\\ -6 & -12 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}✓$$

$\Rightarrow \boxed{m(t)=(t+1)(t-2)}$ ← нема вишеструке нуле $\Rightarrow$ A-дијагоналног типа

СОПСТВЕНЕ ВРЕДНОСТИ матрице A

$\varphi_A(t)=-(t+1)(t-2)^2 \Rightarrow \lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$ ← сопствене вр.

$\lambda_1=-1$ $\quad v=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$Av=\lambda_1 v$

$Av-\lambda_1 v=0$

$(A-\lambda_1 I)v=0$

$(A+I)v=0$

$$\begin{bmatrix}0 & -6 & -3\\ 3 & 9 & 3\\ -6 & -12 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$-6y-3z=0$

$3x+9y+3z=0 \quad /\cdot 2$

$-6x-12y-3z=0$

$3x+9y+3z=0$

$-6y-3z=0 \Rightarrow \boxed{z=-2y}$

$\cancel{6y+3z=0}$

$x=-3y-z$

$x=-3y+2y=-y$

$$v=\begin{bmatrix}-y\\y\\-2y\end{bmatrix}=y\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}}_{v_1}$$

v_1 - база сопственог простора за соп. вр. $\lambda_1=-1$

$\lambda_2=2$ $\quad v=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$Av=\lambda_2 v$

$(A-\lambda_2 I)v=0 \quad (A-2I)v=0$

$$\begin{bmatrix}-3 & -6 & -3\\ 3 & 6 & 3\\ -6 & -12 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$-3x-6y-3z=0 \quad \cdot(-2)$

$3x+6y+3z=0$

$-6x-12y-6z=0$

$0=0$

$0=0$

$\Rightarrow x=-2y-z$, $\quad y,z\in\mathbb{R}$

$$v=\begin{bmatrix}-2y-z\\y\\z\end{bmatrix}=y\underbrace{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}}_{v_2}+z\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}}_{v_3}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \sim \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -\tfrac{1}{2} & 1\end{bmatrix} \Rightarrow v_2, v_3 \text{ - лин. нез.}$$

v_2, v_3 - база сопственог простора за сопств. вр. $\lambda_2=2$

- v_1 је лин. нез. са v_2 и v_3 јер су то сопствени вектори за разне сопствене вр.

$\Rightarrow$ A (реда 3) има 3 лин. нез. сопствена вектора $\Rightarrow$ A дијагоналног типа

$$P_1 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \lambda=-1 \quad\quad \lambda=2 \end{array}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

задовољавају

$$D = P_1^{-1} A P_1$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -6 & -3 \\ 3 & 8 & 3 \\ -6 & -12 & -4 \end{bmatrix}$$

ПРОВЕРА

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] /\cdot 2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] /\cdot 2 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] /\cdot(-1) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ /\cdot(-1) \\ /\cdot(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{matrix}}_{P^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \qquad P_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P_1^{-1} A P_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -6 & -3 \\ 3 & 8 & 3 \\ -6 & -12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \checkmark$$

А нама треба P т.д. $\underline{A = P^{-1} D P}$

имамо: $D = P_1^{-1} A P_1 \quad P_1 \cdot \quad /\cdot P_1^{-1}$

$P_1 D P_1^{-1} = A$ тј. $\underline{A = P_1 D P_1^{-1}}$

тражено P т.д. $A = P^{-1} D P$ је $P = P_1^{-1}$

дакле $P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД

Деф1 Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{R}$ (реалан векторски простор). СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД на V је ф-ја која сваком пару вектора $u, v \in V$ додељује реалан број $\langle u,v\rangle \in \mathbb{R}$ и која задовољава аксиоме: $(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle$

1° ЛИНЕАРНОСТ ПО ПРВОМ АРГУМЕНТУ

$$\langle a u_1 + b u_2, v\rangle = a\langle u_1, v\rangle + b\langle u_2, v\rangle, \quad a,b\in\mathbb{R}, \quad u_1,u_2,v\in V$$

$(u_1+u_2)\circ v = u_1\circ v + u_2\circ v$

$(\alpha u)\circ v = \alpha(u\circ v)$

2° КОМУТАТИВНОСТ

$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ $\quad$ $u\circ v = v\circ u$

3° ПОЗИТИВНА ДЕФИНИТНОСТ

$\forall u\in V \ \langle u,u\rangle \geq 0$ $\quad$ $u\circ u \geq 0$

$\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u=0$ $\quad$ $u\circ u = 0 \Leftrightarrow u=0$

- Особина 1) је еквивалентна са

$\langle u_1+u_2, v\rangle = \langle u_1,v\rangle + \langle u_2,v\rangle$ АДИТИВНОСТ

$\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$ ХОМОГЕНОСТ

- Због комутативности, скалани производ је линеаран и по другом аргументу.
- $\underline{\langle 0,v\rangle} = \langle 0+0,v\rangle = \underline{\langle 0,v\rangle + \langle 0,v\rangle} \Rightarrow \langle 0,v\rangle = 0$

Деф2 Норма вектора u је $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$.

ОСОБИНЕ НОРМЕ:

1) $\|u\| \geq 0$

$\|u\| = 0 \Leftrightarrow \langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u=0$

2) $\|k\cdot u\| = |k|\cdot\|u\|$

$\sqrt{\langle ku,ku\rangle} = \sqrt{k^2\langle u,u\rangle} = |k|\,\|u\|$

3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ - неједнакост троугла (дужина странице троугла је $\leq$ од збира дужина остале две странице)

Деф.3 Ако је $\|u\|=1$, вектор u зовемо јединични вектор (нормиран)

$\hat{u} = \frac{1}{\|u\|}\cdot u$ ← нормирање вектора.

ПРИМЕР Стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^n$

$u=(a_1, a_2, \dots, a_n)$ $\quad$ $v=(b_1, b_2, \dots, b_n)$

$\langle u,v\rangle = u\circ v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

Деф.4 УНИТАРНИ ПРОСТОР је векторски простор снабдевен скаларним производом.

1. $u=(1,2,4)$
$v=(2,-3,5)$
$w=(4,2,-3)$

$$u\circ v=(1,2,4)\circ(2,-3,5)=2-6+20=16$$
$$(u+v)\circ w=(3,-1,9)\circ(4,2,-3)=12-2-27=-17$$
$$\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$$

2. Доказати да је са $\langle u,v\rangle = x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2$, $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$ дефинисан један скаларни производ у $\mathbb{R}^2$.

1° ЛИНЕАРНОСТ ПО 1. АРГУМЕНТУ:

$$\langle au+bw,v\rangle \overset{?}{=} a\langle u,v\rangle + b\langle w,v\rangle$$

$u=(x_1,x_2)$
$v=(y_1,y_2)$
$w=(z_1,z_2)$

$$au+bw=a(x_1,x_2)+b(z_1,z_2)=(ax_1+bz_1,\ ax_2+bz_2)$$

$$\underline{\langle au+bw,v\rangle}=(ax_1+bz_1)\cdot y_1-(ax_1+bz_1)y_2-(ax_2+bz_2)y_1+3(ax_1+bz_1)y_2=$$
$$=a(x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_1y_1)+b(z_1y_1-z_1y_2-z_2y_1+3z_1z_2)=$$
$$=\underline{a\langle u,v\rangle+b\langle w,v\rangle}.\ ✓$$

2° КОМУТАТИВНОСТ

$$\langle u,v\rangle \overset{?}{=} \langle v,u\rangle$$

$$\underline{\langle u,v\rangle}=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+3x_2y_2=y_1x_1-y_2x_1-y_1x_2+3y_2x_2=$$
$$=y_1x_1-y_1x_2-y_2x_1+3y_2x_2=\underline{\langle v,u\rangle}\ ✓$$

3° ПОЗИТИВНА ДЕФИНИТНОСТ

$\langle u,u\rangle\geq 0$? $\langle u,u\rangle=0 \overset{?}{\Leftrightarrow} u=0$

$$\underline{\langle u,u\rangle}=x_1^2-x_1x_2-x_2x_1+3x_2^2=$$
$$=x_1^2-2x_1x_2+3x_2^2=$$
$$=(x_1-x_2)^2+2x_2^2\geq 0\ ✓$$

$$\underline{\langle u,u\rangle=0}\Leftrightarrow \underbrace{(x_1-x_2)^2}_{\geq 0}+\underbrace{2x_2^2}_{\geq 0}=0$$
$$\Leftrightarrow x_1=x_2 \ \wedge\ x_2=0$$
$$\Leftrightarrow x_1=x_2=0$$
$$\Leftrightarrow \underline{u=0}$$

Нађи $\langle u,v\rangle$ и $\|u\|$ ако је $u=(1,5)$ и $v=(3,4)$

$$\langle u,v\rangle=\langle(1,5),(3,4)\rangle=1\cdot3-1\cdot4-5\cdot3+3\cdot5\cdot4=3-4-15+60=44$$
$$\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}=\sqrt{1-1\cdot5-5\cdot1+3\cdot25}=\sqrt{75-9}=\sqrt{66}$$

3. Нека је V векторски простор реалних матрица реда 2×3 са скаларним производом $\langle A,B\rangle=Tr(B^TA)$. Ако је $A=\begin{bmatrix}9&8&7\\6&5&4\end{bmatrix}$ и $B=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ нађи $\langle A,B\rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$.

$$\langle A,B\rangle=Tr(B^TA)=Tr\left(\underbrace{\begin{bmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{bmatrix}}_{3\times2}\underbrace{\begin{bmatrix}9&8&7\\6&5&4\end{bmatrix}}_{2\times3}\right)=Tr\underbrace{\begin{bmatrix}9+24&&\\&16+25&\\&&21+24\end{bmatrix}}_{3\times3}=33+41+45=119$$

$$\|A\|=\sqrt{\langle A,A\rangle}$$
$$\langle A,A\rangle=Tr\left(\begin{bmatrix}9&6\\8&5\\7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&8&7\\6&5&4\end{bmatrix}\right)=Tr\begin{bmatrix}81+36&&\\&64+25&\\&&49+16\end{bmatrix}=117+89+65=271 \rightarrow \|A\|=\sqrt{\langle A,A\rangle}=\sqrt{271}$$

$$\|B\|=\sqrt{\langle B,B\rangle}$$
$$\langle B,B\rangle=\ldots$$

4. Доказати:

а) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

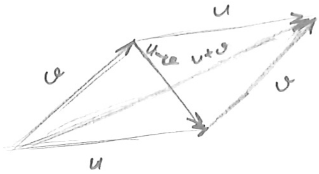
б) $\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$

$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle =$
$= \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \quad (1)$

$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u, u-v\rangle - \langle v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle =$
$= \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \quad (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow \quad \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

$(1)-(2) \Rightarrow \quad \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u,v\rangle$



РАСТОЈАЊЕ И УГАО

Деф. Растојање између вектора u и v је $d(u,v) = \|u-v\|$
Угао између вектора u и v је угао θ, $0 \le \theta \le \pi$ за који важи $\cos\theta = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$

5. Наћи растојање $d(u,v)$ и угао $\theta = \measuredangle(u,v)$ ако је

а) $u = (1,3,5,7)$, $v = (4,-2,8,1)$

б) $u = (1,-3,2)$, $v = (2,1,5)$

а скаларни производ стандардни скаларни производ.

а) $d(u,v) = \|u-v\| = \|(-3,5,-3,6)\| = \sqrt{9+25+9+36} = \sqrt{79}$

6) Доказати да је са

$u \circ v = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$, где је $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$

дефинисан један скаларни производ на $\mathbb{R}^2$.

1° ЛИНЕАРНОСТ ПО 1. АРГУМЕНТУ $\quad u,v,w \in \mathbb{R}^2$

• $(u+w)\circ v = u\circ v + w\circ v$ ← АДИТИВНОСТ ПО 1. АРГУМЕНТУ

$u=(x_1,x_2)$ $\quad u+w = (x_1,x_2)+(z_1,z_2) = (x_1+z_1, x_2+z_2)$

$v=(y_1,y_2)$

$w=(z_1,z_2)$

$(u+w)\circ v = (x_1+z_1, x_2+z_2)\circ(y_1,y_2) = (x_1+z_1)y_1 - 2(x_1+z_1)\cdot y_2 - 2(x_2+z_2)\cdot y_1 + 5(x_2+z_2)y_2 =$

$= x_1y_1 + z_1y_1 - 2x_1y_2 - 2z_1y_2 - 2x_2y_1 - 2z_2y_1 + 5x_2y_2 + 5z_2y_2$

$= \underbrace{x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2}_{} + \underbrace{z_1y_1 - 2z_1y_2 - 2z_2y_1 + 5z_2y_2}_{} =$

$= (x_1,x_2)\circ(y_1,y_2) + (z_1,z_2)\circ(y_1,y_2) =$

$= u\circ v + w\circ v$ ✓

• $(\alpha u)\circ v = \alpha(u\circ v)$ $\quad (\alpha\in\mathbb{R})\ u,v\in\mathbb{R}^2$ ← ХОМОГЕНОСТ ПО 1. АРГУМЕНТУ

$\alpha u = \alpha(x_1,x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$ $\quad v=(y_1,y_2)$

$(\alpha u)\circ v = (\alpha x_1, \alpha x_2)\circ(y_1,y_2) = (\alpha x_1)\cdot y_1 - 2(\alpha x_1)y_2 - 2(\alpha x_2 y_1) + 5(\alpha x_2)y_2 =$

$= \alpha(x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2)$

$= \alpha\cdot((x_1,x_2)\circ(y_1,y_2)) = \alpha\cdot(u\circ v)$ ✓

2° КОМУТАТИВНОСТ

$u\circ v = v\circ u$ $\quad u,v\in\mathbb{R}^2$

$u\circ v = (x_1,x_2)\circ(y_1,y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$

$= y_1x_1 - 2y_2x_1 - 2y_1x_2 + 5y_2x_2$

$= (y_1,y_2)\circ(x_1,x_2)$

$= v\circ u$ ✓

3° ПОЗИТИВНА ДЕФИНИТНОСТ

$u\circ u \geq 0$, $u\in\mathbb{R}^2$ $\qquad u\circ u = 0 \Leftrightarrow u = 0_V$

$u\circ u = (x_1,x_2)\circ(x_1,x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 5x_2^2$

$= x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + x_2^2$

$= \underbrace{(x_1-2x_2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{x_2^2}_{\geq 0} \geq 0$ ✓

$u\circ u = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow x_1 = 0$

$\Leftrightarrow u = (x_1,x_2) = (0,0) = 0_V$ ✓

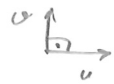
ОРТОГОНАЛНОСТ

Деф.1 Вектори $u, v \in V$ су ОРТОГОНАЛНИ ($u \perp v$) акко је $\langle u, v \rangle = 0$

• $0 \in V$ је ортогоналан на све $v \in V$

$\langle 0, v \rangle = \langle 0+0, v \rangle = \langle 0, v \rangle + \langle 0, v \rangle \Rightarrow \langle 0, v \rangle = 0$ за $\forall v \in V$

• ако је $u \perp v \Rightarrow \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow \cos \sphericalangle(u, v) = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$



Деф.2 Нека је S било који скуп вектора унитарног простора V. Сви вектори који су нормални на сваки вектор из S чине ОРТОГОНАЛНИ КОМПЛЕМЕНТ скупа S.

$$S^{\perp} = \{ v \in V \mid (\forall s \in S)\ \langle v, s \rangle = 0 \}$$

① Показати да је $S^{\perp}$ векторски потпростор простора V ($S^{\perp} \leq V$)

1° $0_V \in S^{\perp}$ јер $\langle 0, s \rangle = 0$ за свако $s \in S$

2° $v_1, v_2 \in S^{\perp} \overset{?}{\Rightarrow} v_1 + v_2 \in S^{\perp}$

$\langle v_1, s \rangle = 0, \ \forall s \in S$ $\qquad \langle v_1 + v_2, s \rangle = \langle v_1, s \rangle + \langle v_2, s \rangle = 0 + 0 = 0 \quad \forall s \in S$

$\langle v_2, s \rangle = 0, \ \forall s \in S$ $\qquad \Rightarrow v_1 + v_2 \in S^{\perp}$

3° $\alpha \in \mathbb{K}, \ v \in S^{\perp} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha v \in S^{\perp}$

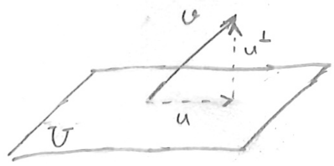
$\langle v, s \rangle = 0, \ \forall s \in S$ $\qquad \langle \alpha v, s \rangle = \alpha \langle v, s \rangle = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ $\qquad \Rightarrow \alpha v \in S^{\perp}$

(V-коначне димензије)

T1 Ако је $U \leq V$, тада је и $U^{\perp} \leq V$ и

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

Ово значи да се сваки вектор $v \in V$ може представити на јединствен начин као



$v = \underset{\in U}{u} + \underset{\in U^{\perp}}{u^{\perp}}$

u - ОРТОГОНАЛНА ПРОЈЕКЦИЈА вектора v на U

$u^{\perp}$ - ОРТОГОНАЛНА ДОПУНА за пројекцију u.

ОРТОГОНАЛНИ СКУПОВИ И БАЗЕ

Деф.3. Скуп вектора $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ је ОРТОГОНАЛАН ако је сваки пар његових вектора ортогоналан.

$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad i \neq j$

S је ОРТОНОРМИРАН $\Leftrightarrow$ $\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ ($= \delta_{ij}$ - КРОНЕКЕРОВ СИМБОЛ)

тј. ако су свака два вектора међусобно нормална и норма свих вектора је $= 1$.

T2 Сваки ортогоналан скуп не-нула вектора је линеарно независан.

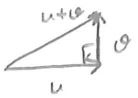
T3 (ПИТАГОРА)

Ако је $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ортогоналан скуп вектора, тада је

$$\|u_1 + u_2 + \dots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_n\|^2$$

$n=2$ $\quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Доказ:



$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle =$$
$$= \langle u,u\rangle + \langle v,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$$
$$= \|u\|^2 + 2\underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0\ (u\perp v)} + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Деф. 4 ОРТОГОНАЛНА БАЗА векторског простора V је база која је ортогоналан скуп. Слично и за ОРТОНОРМИРАНУ БАЗУ (ОНБ).

ПРИМЕР ОНБ: Канонска база простора $\mathbb{R}^3$ у односу на стандардни скаларни производ је ОНБ.

$e_1 = (1,0,0) \qquad e_1 \circ e_2 = (1,0,0)\circ(0,1,0) = 0 \qquad e_1 \circ e_1 = (1,0,0)\circ(1,0,0) = 1$

$e_2 = (0,1,0) \qquad e_1 \circ e_3 = 0 \qquad e_2 \circ e_2 = 1$

$e_3 = (0,0,1) \qquad e_2 \circ e_3 = 0 \qquad e_3 \circ e_3 = 1$

1. Нека је $S = \{u_1, u_2, u_3\}$, $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,2,-3)$, $u_3 = (5,-4,-1)$.

а) Показати да је S ортогоналан скуп вектора у односу на стандардни скаларни производ и да је S база за $\mathbb{R}^3$.

б) Написати $v = (1,5,-7)$ као линеарну комбинацију вектора.

а) $\langle u_1, u_2\rangle = (1,1,1)\circ(1,2,-3) = 1+2-3 = 0$ $\qquad \|u_1\| = \sqrt{\langle u_1, u_1\rangle} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\langle u_1, u_3\rangle = (1,1,1)\circ(5,-4,-1) = 5-4-1 = 0$ $\qquad \|u_2\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\langle u_2, u_3\rangle = (1,2,-3)\circ(5,-4,-1) = 5-8+3 = 0$ $\qquad \|u_3\| = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}$

S је ортогоналан скуп вектора $\overset{(T2)}{\Rightarrow}$ u_1, u_2, u_3 - лин. нез.; $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ $\Rightarrow$ u_1, u_2, u_3 је база (али није ортонормирана)

б) $v = x\cdot u_1 + y\cdot u_2 + z u_3 \quad /\circ u_1 \quad /\circ u_2 \quad /\circ u_3$

$(1,5,-7) = x\cdot(1,1,1) + y(1,2,-3) + z(5,-4,-1) \qquad \circ v_1$

$v\circ u_1 = x\cdot u_1\circ u_1 + y\cdot \underbrace{u_2\circ u_1}_{=0\ (u_2\perp u_1)} + z\,\underbrace{u_3\circ u_1}_{=0\ (u_3\perp u_1)} \Rightarrow x = \dfrac{u_1\circ v}{u_1\circ u_1} = \dfrac{u_1\circ v}{\|u_1\|^2}$

$v\circ u_2 = x\,\underbrace{u_1\circ u_2}_{=0} + y\,u_2\circ u_2 + z\,\underbrace{u_3\circ u_2}_{=0} \Rightarrow y = \dfrac{u_2\circ v}{u_2\circ u_2} = \dfrac{u_2\circ v}{\|u_2\|^2}$

$v\circ u_3 = x\,\underbrace{u_1\circ u_3}_{=0} + y\,\underbrace{u_2\circ u_3}_{=0} + z\,u_3\circ u_3 \Rightarrow z = \dfrac{u_3\circ v}{u_3\circ u_3} = \dfrac{u_3\circ v}{\|u_3\|^2}$

ФУРИЈЕОВИ КОЕФИЦИЈЕНТИ вектора v у односу на базу $[u_1, u_2, u_3]$

(координате вектора у односу на ОНБ се рачунају лако)

$$x = \frac{u_1\circ v}{\|u_1\|^2} = \frac{(1,1,1)\circ(1,5,-7)}{3} = \frac{1+5-7}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{u_2\circ v}{\|u_2\|^2} = \frac{(1,2,-3)\circ(1,5,-7)}{14} = \frac{1+10+21}{14} = \frac{32}{14} = \frac{16}{7}$$

$$z = \frac{u_3\circ v}{\|u_3\|^2} = \frac{(5,-4,-1)\circ(1,5,-7)}{42} = \frac{5-20+7}{42} = \frac{-8}{42} = \frac{-4}{21}$$

ГРАМ-ШМИТОВ ПОСТУПАК ОРТОГОНАЛИЗАЦИЈЕ

- Нека је $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ база унитарног простора V. Грам-Шмитовим поступком налазимо ортогоналну базу $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n)$ такву да је:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{e}_1 &= f_1 \\
\hat{e}_2 &= f_2 - \frac{f_2 \circ \hat{e}_1}{\hat{e}_1 \circ \hat{e}_1}\hat{e}_1 \\
\hat{e}_3 &= f_3 - \left(\frac{f_3 \circ \hat{e}_1}{\hat{e}_1 \circ \hat{e}_1}\hat{e}_1 + \frac{f_3 \circ \hat{e}_2}{\hat{e}_2 \circ \hat{e}_2}\hat{e}_2\right) \\
&\dots \\
\hat{e}_n &= f_n - \left(\frac{f_n \circ \hat{e}_1}{\hat{e}_1 \circ \hat{e}_1}\hat{e}_1 + \dots + \frac{f_n \circ \hat{e}_{n-1}}{\hat{e}_{n-1} \circ \hat{e}_{n-1}}\hat{e}_{n-1}\right)
\end{aligned}\right\} \text{ортогонална база} \qquad \left.\begin{aligned}
e_1 &= \frac{\hat{e}_1}{\|\hat{e}_1\|} \\
e_2 &= \frac{\hat{e}_2}{\|\hat{e}_2\|} \\
&\vdots \\
e_n &= \frac{\hat{e}_n}{\|\hat{e}_n\|}
\end{aligned}\right\} \text{ОНБ}$$

1. Грам-Шмитовим поступком одредити ОНБ потпростора W простора $\mathbb{R}^4$ генерисаног векторима

$$f_1 = (1,1,1,1)$$
$$f_2 = (1,0,1,0) \qquad W = \mathcal{L}(f_1, f_2, f_3)$$
$$f_3 = (-1,2,0,1)$$

Затим одредити базу ортогоналног комплемента W ($W^\perp$).

$$\hat{e}_1 = f_1 = \boxed{(1,1,1,1)}$$

$$\hat{e}_2 = f_2 - \frac{f_2 \circ \hat{e}_1}{\hat{e}_1 \circ \hat{e}_1}\hat{e}_1 = (1,0,1,0) - \frac{(1,0,1,0)\circ(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\circ(1,1,1,1)}(1,1,1,1) =$$
$$= (1,0,1,0) - \frac{2}{4}(1,1,1,1) = \boxed{\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)}$$

$$\hat{e}_3 = f_3 - \left(\frac{f_3 \circ \hat{e}_1}{\hat{e}_1 \circ \hat{e}_1}\hat{e}_1 + \frac{f_3 \circ \hat{e}_2}{\hat{e}_2 \circ \hat{e}_2}\hat{e}_2\right) = (-1,2,0,1) - \frac{(-1,2,0,1)\circ(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\circ(1,1,1,1)}(1,1,1,1) -$$
$$- \frac{(-1,2,0,1)\circ\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\circ\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)$$
$$= (-1,2,0,1) - \frac{2}{4}(1,1,1,1) - \frac{-2}{1}\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) =$$
$$= (-1,2,0,1) - \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) + (1,-1,1,-1) = \boxed{\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)}$$

НОРМИРАМО ДОБИЈЕНУ ОРТОГОНАЛНУ БАЗУ:

$$e_1 = \frac{\hat{e}_1}{|\hat{e}_1|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}}(1,1,1,1) = \boxed{\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)}$$

$$e_2 = \frac{\hat{e}_2}{|\hat{e}_2|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) = \boxed{\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)}$$

(e_1, e_2, e_3) – ОРТОНОРМИРАНА БАЗА простора W.

$$e_3 = \frac{\hat{e}_3}{|\hat{e}_3|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) = \boxed{\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)}$$

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \perp \overset{\mathcal{L}(f_1,f_2,f_3)}{\overset{\parallel}{W}}\} = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \perp f_1, f_2, f_3\} = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid v \circ f_i = 0,\ i = 1,2,3\}$$

$v = (x, y, z, t)$

$$\begin{aligned}
v \circ f_1 &= \boxed{x} + y + z + t = 0 \quad / \cdot (-1) \\
v \circ f_2 &= x + z = 0 \\
v \circ f_3 &= -x + 2y + t = 0 \\
\hline
& \quad -y - t = 0 \quad / \cdot 3 \\
& \quad 3y + z + 2t = 0 \\
\hline
& \quad z - t = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} z &= t, \quad t \in \mathbb{R} \\ y &= -t \end{aligned}}$$

$$x = -y - z - t$$
$$= t - t - t$$
$$\boxed{x = -t}$$

$$\Rightarrow v = (x, y, z, t) = (-t, -t, t, t) = t\underbrace{(-1,-1,1,1)}_{\text{база}}$$

$$\Rightarrow W^\perp = \{t(-1,-1,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \boxed{\mathcal{L}((-1,-1,1,1))}$$

$$W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^4$$

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim W + \dim W^\perp - \dim \underbrace{W \cap W^\perp}_{\{0\}}$$
$$4 = 3 + \dim W^\perp$$
$$\Rightarrow \dim W^\perp = 1$$