СОПСТВЕНЕ ВРЕДНОСТИ И СОПСТВЕНИ ВЕКТОРИ

Деф. Нека је A квадратна матрица реда n над пољем $\mathbb{K}$. Скалар $\lambda \in \mathbb{K}$ зовемо СОПСТВЕНОМ ВРЕДНОШЋУ матрице A акко

$\exists v \in \mathbb{K}^n, v \neq 0$ т.д. је $Av = \lambda v$

нула вектор

$$\underset{n\times n}{A}\underset{n\times 1}{\begin{bmatrix}\vdots\end{bmatrix}} = \lambda \underset{n\times 1}{\begin{bmatrix}\vdots\end{bmatrix}}$$

Такво v се зове СОПСТВЕНИ ВЕКТОР који одговара сопственој вредности λ.

- Скуп свих вектора v који су сопствени вектори за сопствену вредност λ је један потпростор $\mathbb{K}^n$ који се зове сопствени простор за сопствену вредност λ.

E_λ - сопствени простор са сопствену вр. λ $\quad E_\lambda = \{ v \mid Av = \lambda v\}$

$1°\ 0_v \in E_\lambda$ јер $A\cdot 0 = \lambda \cdot 0 \iff 0 = 0$ ✓

$2°\ u, v \in E_\lambda$

$Au = \lambda u$, $Av = \lambda v$ $\Rightarrow \underline{A(u+v)} = Au + Av = \lambda u + \lambda v = \underline{\lambda(u+v)} \Rightarrow u+v \in E_\lambda$

$3°\ v \in E_\lambda,\ a \in \mathbb{K}$

$Av = \lambda v$ $\quad A(av) = aAv = a\lambda v = \lambda(av) \Rightarrow av \in E_\lambda$

(Т) λ је сопствена вредност матрице A АККО је λ нула карактеристичног полинома $\varphi_A(t)$, тј. $\varphi_A(\lambda) = 0$

$\circ\ Av = \lambda v$

$\iff Av - \lambda v = 0$

$\iff (A - \lambda I)v = 0$ $\quad$ па сопствени вектор v за сопствену вредност λ добијамо решавањем хомогеног система ј-на $(A - \lambda I)v = 0$.

(Т) Различитим сопственим вредностима $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ одговарају линеарно независни сопствени вектори.

- Неке матрице немају сопствене вредности и векторе над $\mathbb{R}$, али све матрице над пољем $\mathbb{C}$ имају бар једну сопствену вредност.

ДИЈАГОНАЛИЗАЦИЈА МАТРИЦЕ

Деф. Матрица A је дијагоналног типа ако је слична дијагоналној матрици D тј. ако постоји инвертибилна P тако да је $D = P^{-1}AP$.

дијагонална $\quad \cdot P \backslash \quad / \cdot P^{-1}$

$A = PDP^{-1}$

$$A^m = (PDP^{-1})^m = \underbrace{P D \underbrace{P^{-1} P}_{I} D P^{-1} \dots P D P^{-1}}_{m} = P D^m P^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow D^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \lambda_2^m & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n^m \end{bmatrix}$$

(Т) A реда n је слична дијагоналној АККО A има n линеарно независних сопствених вектора. У том случају ће на дијагонали матрице D бити баш сопствене вредности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ а колоне матрице P ће бити сопствени вектори.

1. Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Наћи:

а) све сопствене вредности матрице A и одговарајуће сопствене просторе

б) инвертибилну матрицу P тако да је $D = P^{-1}AP$ дијагонална.

в) $A^5 = ?$

а) СОПСТВЕНЕ ВРЕДНОСТИ:

$$\varphi_A(t) = \det(A - \lambda t) = \begin{vmatrix} 1-t & 4 \\ 2 & 3-t \end{vmatrix} = (1-t)(3-t) - 8 = 3 - 3t - t + t^2 - 8$$
$$= t^2 - 4t - 5 = (t-5)(t+1)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = -1$

СОПСТВЕНИ ВЕКТОРИ:

$\lambda_1 = 5$

$Av = 5 \cdot v$

$Av - 5v = 0$

$(A - 5I)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 1-5 & 4 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -4x + 4y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow x - y = 0 \quad \boxed{x = y}$$

$v_1 = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix},\ x \in \mathbb{R}$

сопствени вектори за сопствену вр. 5.

$v_1 = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ сопствени простор који одговара сопственој вредности $\lambda_1 = 5$ је генерисан вектором $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -1$

$Av = -1 \cdot v$

$(A + 1 \cdot I)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2x + 4y = 0$

$2x + 4y = 0$

$x = -2y$

$v_2 = \begin{bmatrix} -2y \\ y \end{bmatrix} = y \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{генератор}}$

б)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

колоне су сопствени вектори

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

ПРОВЕРА:

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$$

$P \backslash\ D = P^{-1}AP\ / P^{-1}$

$PDP^{-1} = A$

в) $A^5 = (PDP^{-1})^5 = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}D\underbrace{P^{-1}P}_{I}D\underbrace{P^{-1}P}_{I}D\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1} = PD^5P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3125 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \ldots$$

(2.) Нека је $A=\begin{bmatrix}5&-1\\1&3\end{bmatrix}$. Испитати да ли је A слична дијагоналној матрици D.

$$\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}5-t&-1\\1&3-t\end{vmatrix}=(5-t)(3-t)+1=15-3t-5t+t^2+1=t^2-8t+16=(t-4)^2$$

$\lambda_1=\lambda_2=4$ двострука нула карактеристичног полинома $\Rightarrow$ A има једну једину сопствену вредност $\lambda=4$.

$\underline{\lambda=4}$

$Av=4v$

$(A-4I)v=0$

$\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$

$x-y=0$

$x-y=0$

$x=y$

$v=\begin{bmatrix}x\\x\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ сопствени вектори

број линеарно независних вектора је $1 \neq$ реда матрице (2) $\Rightarrow$ A није дијагоналног типа

(3.) Нека је $A=\begin{bmatrix}4&1&-1\\2&5&-2\\1&1&2\end{bmatrix}$. Испитати да ли је дијагоналног типа и ако јесте нађи инверзибилну матрицу P и дијагоналну D тако да је $D=P^{-1}AP$.

$$\varphi_A(t)=\det(A-tI)=\begin{vmatrix}4-t&1&-1\\2&5-t&-2\\1&1&2-t\end{vmatrix}=(4-t)\begin{vmatrix}5-t&-2\\1&2-t\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&-2\\1&2-t\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&5-t\\1&1\end{vmatrix}=$$

$$=(4-t)(t^2-7t+\underbrace{10+2}_{12})-(4-2t+2)-(2-5+t)=$$

$$=4t^2-28t+48-t^3+7t^2-12t-4+2t-2-2+5-t=$$

$$=\boxed{-t^3+11t^2-39t+45}$$

$$=(t-3)(-t^2+8t-15)=-(t-3)(t^2-8t+15)$$

$$=-(t-3)(t-3)(t-5)$$

$$=-(t-3)^2(t-5)$$

$\lambda_1=3$ и $\lambda_2=5$ сопствене вр.

$\varphi_A(3)=-27+99-117+45=0$

	-1	11	-39	45
3	-1	8	-15	0

$\underline{\lambda=3}$

$(A-3I)v=0$

$\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&2&-2\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$x+y-z=0$ $/\cdot(-2)$ $/\cdot(-1)$

$2x+2y-2z=0$

$x+y-z=0$

$x+y-z=0$ $\Rightarrow$ $z=x+y$

$0=0$

$0=0$

$v=\begin{bmatrix}x\\y\\x+y\end{bmatrix}=x\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}_{v_1}+y\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}}_{v_2}$

v_1, v_2 - база сопственог простора који одговара сопственој вр. $\lambda_1=3$

$\underline{\lambda=5}$

$(A-5I)v=0$

$\begin{bmatrix}-1&1&-1\\2&0&-2\\1&1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$-x+y-z=0$ $/\cdot 2$

$2x-2z=0$

$x+y-3z=0$

$2y-4z=0$

$\cancel{2y-4z=0}$

$y=2z$

$x=y-z=2z-z=z$

$v=\begin{bmatrix}z\\2z\\z\end{bmatrix}=z\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}}_{v_3}$

v је лин. нез. са v_1 и v_2 (сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима)

$$\Rightarrow A \sim D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = PAP^{-1}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Наћи сопствене вредности и сопствене векторе. Да ли је A дијагоналног типа?

$$\varphi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ 2 & -1-t \end{vmatrix} = (t-1)(t+1) + 2 = t^2 - 1 + 2 = t^2 + 1$$

овај полином нема реалних нула $\Rightarrow$ A није дијагоналног типа над $\mathbb{R}$
(али јесте над $\mathbb{C}$)

$$\varphi_A(t) = t^2 + 1 = (t-i)(t+i)$$

$$\lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i$$

$$A \sim D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = i$

$$(A - iI)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(1-i)x \boxed{-y} = 0 \quad / \cdot (-(1+i))$$
$$2x - (1+i)y = 0$$

$$(-(1-i)(1+i) + 2)x = 0$$
$$(-1 + i^2 + 2)x = 0$$
$$(-2 + 2)x = 0$$
$$0 = 0$$

$$y = (1-i)x$$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ (1-i)x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -i$

$$(A + iI)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ 2 & -1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(1+i)x - y = 0 \quad / \cdot (-1+i)$$
$$2x + (-1+i)y = 0$$

$$((1+i)(-1+i) + 2)x = 0$$
$$(i^2 - 1 + 2)x = 0$$
$$0 = 0$$

$$y = (1+i)x$$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ (1+i)x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \operatorname{adj} P = \frac{1}{1+i-1+i} \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ i-1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1+i & -1 \\ i-1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2i} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2i} & \frac{1}{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix}$$

5. Показати да матрице A и A^T имају исти карактеристични полином.

$$\varphi_A(t) = \det(A - tI)$$

$$\underline{\varphi_{A^T}(t)} = \det(A^T - tI) \underset{\substack{\uparrow \\ \det B = \det B^T}}{=} \det((A^T - tI)^T) = \det(A^{TT} - tI^T) = \det(A - tI) = \underline{\varphi_A(t)}$$

$$D = P^{-1}AP$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-i+2i}{2} & \frac{-1+i-i}{2} \\ \frac{1+i-2i}{2} & \frac{-1-i+i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1-i}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$\frac{1+i}{2} - \frac{1-i}{2} = i \qquad \frac{1-i}{2} - \frac{1}{2}(1+i) = -i$$

n-ти степен матрице

3. (наставак)

$$A=\begin{bmatrix}4&1&-1\\2&5&-2\\1&1&2\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}\qquad \underline{D=P^{-1}AP}$$

Наћи A^n.

P^{-1}:

$$\det P=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}1&0\\0&1\\1&1\end{matrix}=1-1-2=-2$$

$$\operatorname{adj}P=\begin{bmatrix}-1&2&-1\\1&0&-1\\-1&-2&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\2&0&-2\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{\det P}\operatorname{adj}P=\begin{bmatrix}\frac12&-\frac12&\frac12\\-1&0&1\\\frac12&\frac12&-\frac12\end{bmatrix}$$

$$P\cdot\backslash\ D=P^{-1}AP\ /\cdot P^{-1}$$

$$PDP^{-1}=\underbrace{PP^{-1}}_{I}A\underbrace{PP^{-1}}_{I}\quad\Rightarrow\quad A=PDP^{-1}$$

$$A^n=PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}D\underbrace{P^{-1}\cdots}_{I}\underbrace{\cdots P}_{I}DP^{-1}=PD^nP^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3^n&0&0\\0&3^n&0\\0&0&5^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac12&-\frac12&\frac12\\-1&0&1\\\frac12&\frac12&-\frac12\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3^n&0&5^n\\0&3^n&2\cdot5^n\\3^n&3^n&5^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac12&-\frac12&\frac12\\-1&0&1\\\frac12&\frac12&-\frac12\end{bmatrix}=$$

$$=\boxed{\begin{bmatrix}\frac12 3^n+\frac12 5^n&-\frac12 3^n+\frac12 5^n&\frac12 3^n-\frac12 5^n\\-3^n+5^n&5^n&3^n-5^n\\\frac12 3^n-3^n+\frac12 5^n&-\frac12 3^n+\frac12 5^n&\frac32 3^n-\frac12 5^n\end{bmatrix}}$$

1. (минимални полином – наставак)

$$A=\begin{bmatrix}4&-2&2\\6&-3&4\\3&-2&3\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\qquad P=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}\qquad \underline{D=P^{-1}AP}$$

Наћи A^n.

P^{-1}:

$$\det P=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&2\\0&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}2&0\\3&1\\0&1\end{matrix}=2+3-4=1$$

$$\operatorname{adj}P=\begin{bmatrix}-1&-3&3\\1&2&-2\\-1&-1&2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-3&2&-1\\3&-2&2\end{bmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{\det P}\operatorname{adj}P=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-3&2&-1\\3&-2&2\end{bmatrix}$$

$$P\backslash\ D=P^{-1}AP\ /P^{-1}\quad\Rightarrow\quad A=P\cdot DP^{-1}$$

$$A^n=(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})=PD^nP^{-1}=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1^n&0&0\\0&1^n&0\\0&0&2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-3&2&-1\\3&-2&2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&2^n\\3&1&2^{n+1}\\0&0&2^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-3&2&-1\\3&-2&2\end{bmatrix}=$$

$$=\boxed{\begin{bmatrix}-2+3\cdot2^n&2-2^{n+1}&-2+2^{n+1}\\-3-3+3\cdot2^{n+1}&5-2^{n+2}&-4-2^{n+1}\\3\cdot2^n&-2^{n+1}&2^{n+1}\end{bmatrix}}$$

МИНИМАЛНИ ПОЛИНОМ

A - квадратна матрица реда n над пољем $\mathbb{K}$

• посматрамо све полиноме $f(t)$ које поништава матрица A тј. $f(A)=0$ (по (Т) КЕЈЛИ-ХАМ. карактеристични полином $\varphi_A(t)$ припада овом скупу јер $\varphi_A(A)=0$)

• Нека је $m_A(t)$ моничан полином (водећи коефицијент $=1$) из овог скупа најмањег степена. $m_A(t)$ зовемо МИНИМАЛНИ ПОЛИНОМ матрице A.

(T1) $m_A(t)$ дели сваки полином $f(t)$ кога A поништава, тј. $m_A(t) \mid f(t)$.

Специјално, $m_A(t) \mid \varphi_A(t)$

минимални ↗ карактеристични ↑

(T2) Минималан и карактеристичан полином имају исте линеарне (нерастављиве) факторе тј. имају исте корене (нуле)

(1.) Наћи минимални полином $m_A(t)$ матрице A.

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 2\\ 6 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

• прво карактеристични полином:

$$\varphi_A(t)=\det(A-tI)=\begin{vmatrix}4-t & -2 & 2\\ 6 & -3-t & 4\\ 3 & -2 & 3-t\end{vmatrix}\begin{matrix}4-t & -2\\ 6 & -3-t\\ 3 & -2\end{matrix}$$

$$=(4-t)(-3-t)(3-t)-24-24+6(3+t)+8(4-t)+12(3-t)=$$

$$=(-12\underbrace{-4t+3t}_{-t}+t^2)(3-t)-48+18+6t+32-8t+36-12t=$$

$$=(-36-3t+3t^2+12t+t^2-t^3)+38-14t=$$

$$=-t^3+4t^2-5t+2$$

II начин

$$\varphi_A(t)=-t^3+(trA)t^2-(A_{11}+A_{22}+A_{33})t+\det A$$

$$trA=4-3+3=4$$

$$\det A=-36-24-24+18+32+36=-48+50=2$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-9+8=-1$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=12-6=6 \qquad -(A_{11}+A_{22}+A_{33})=-5$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}4 & -2\\ 6 & -3\end{vmatrix}=-12+12=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_A(t)=-t^3+4t^2-5t+2}$$

$$\varphi_A(1)=-1+4-5+2=0$$

$$(-t^3+4t^2-5t+2):(t-1)=-t^2+3t-2 \qquad \Rightarrow \varphi_A(t)=(t-1)(-t^2+3t-2)$$

$$\begin{aligned}
&-(-t^3+t^2)\\
&\quad 3t^2-5t\\
&\quad -(3t^2-3t)\\
&\qquad -2t+2\\
&\qquad -(-2t+2)\\
&\qquad\quad 0
\end{aligned}$$

$$t_{2,3}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{-2}=\frac{-3\pm1}{-2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}$$

$$\varphi_A(t)=-(t-1)(t-1)(t-2)=-(t-1)^2(t-2)$$

• сви нерастављиви фактори од $\varphi_A(t)$ $((t-1),(t-2))$ морају бити нерастављиви фактори и од $m_A(t)$.

КАНДИДАТИ ЗА $m_A(t)$: $(t-1)(t-2)$ и $(t-1)^2(t-2)=\varphi_A(t)$

$p(t)=(t-1)(t-2)$

$$p(A)=(A-I)(A-2I)=\begin{bmatrix}3 & -2 & 2\\ 6 & -4 & 4\\ 3 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2 & 2\\ 6 & -5 & 4\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow \boxed{m_A(t)=(t-1)(t-2)}$$

(T3) Матрица A реда n је дијагоналног типа акко њен минимални полином нема вишеструких нула.

(2.) Наћи

а) минимални полином

б) сопствене вредности и базе сопствених простора

матрице A. Испитати да ли је A дијагоналног типа.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^3$$

$\lambda = 1$ једна једина сопствена вредност реда 3

а) Кандидати за $m_A(t)$ су: $t-1$, $(t-1)^2$, $(t-1)^3$ (одлучили смо јер $m_A(t)$ мора бити моничан тј. водећи (онај уз највећи степен) коефицијент мора бити 1)

$A - I \neq 0$

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{m_A(t) = (t-1)^2}$$

има двоструке нуле

(T3) $\Rightarrow$ A није дијагоналног типа.

б) $\lambda = 1$

$Av = 1 \cdot v$

$Av - v = 0$

$(A - I)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y = 0 \Rightarrow x, z$ - произвољни

$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$

$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$

$$\Rightarrow v = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = x\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + z\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

база сопственог простора

има само 2 сопствена вектора

(треба нам 3 да би A била дијагоналног типа)

(1.) (НАСТАВАК)

$\lambda_1 = 1$

$Av = 1 \cdot v$

$(A - I)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$3x - 2y + 2z = 0 \quad / \cdot (-2) \quad / \cdot (-1)$

$6x - 4y + 4z = 0$

$3x - 2y + 2z = 0$

$3x - 2y + 2z = 0$

$0 = 0$

$0 = 0$

$$y = \frac{3x + 2z}{2} \qquad v = \begin{bmatrix} x \\ \frac{3x+2z}{2} \\ z \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{x}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$

$Av = 1 \cdot v$

$(A - 2I)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2x - 2y + 2z = 0$

$6x - 5y + 4z = 0$

$3x - 2y + z = 0$

$2z - 2y + 2x = 0$

$4z - 5y + 6x = 0$

$z - 2y + 3x = 0$

$z - 2y + 3x = 0 \quad / \cdot (-4) \quad / \cdot (-2)$

$4z - 5y + 6x = 0$

$2z - 2y + 2x = 0$

$3y - 6x = 0 \quad / : 3 \Rightarrow y - 2x = 0$

$2y - 4x = 0 \quad / : 2$

$y = 2x$

$z = 2y - 3x = 4x - 3x = x$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (*)$$

$$(*) \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Важи

$D = P^{-1}AP$

3. Одредити карактеристични и минимални полином матрице

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -6 & -3\\ 3 & 8 & 3\\ -6 & -12 & -4\end{bmatrix}$$

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A. Испитати да ли је матрица A дијагоналног типа и ако јесте одредити инверзибилну матрицу P и дијагоналну матрицу D тако да је $A=P^{-1}DP$.

КАРАКТЕРИСТИЧНИ ПОЛИНОМ:

$$\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}-1-t & -6 & -3\\ 3 & 8-t & 3\\ -6 & -12 & -4-t\end{vmatrix} = -(1+t)\begin{vmatrix}8-t & 3\\ -12 & -4-t\end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix}3 & 3\\ -6 & -4-t\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}3 & 8-t\\ -6 & -12\end{vmatrix} =$$

$$= -(1+t)\left((8-t)(-4-t)+36\right) + 6(-12-3t+18) - 3(-36+48-6t) =$$

$$= -(1+t)(t^2-4t+4)$$

$$= -(t+1)(t-2)^2$$

МИНИМАЛНИ ПОЛИНОМ:

кандидати $(t+1)(t-2)$ или $(t+1)(t-2)^2$

$p(t)=(t+1)(t-2)$

$$p(A)=(A+I)(A-2I)=\begin{bmatrix}0 & -6 & -3\\ 3 & 9 & 3\\ -6 & -12 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & -6 & -3\\ 3 & 6 & 3\\ -6 & -12 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} ✓$$

$\Rightarrow \boxed{m(t)=(t+1)(t-2)}$ ← нема вишеструке нуле $\Rightarrow$ A - дијагоналног типа

СОПСТВЕНЕ ВРЕДНОСТИ матрице A

$\varphi_A(t)=-(t+1)(t-2)^2 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=2$ ← сопствене вр.

$\underline{\lambda_1=-1}$ $\quad v=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$

$Av=\lambda_1 v$

$Av-\lambda_1 v=0$

$(A-\lambda_1 I)v=0$

$(A+I)v=0$

$$\begin{bmatrix}0 & -6 & -3\\ 3 & 9 & 3\\ -6 & -12 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$-6y-3z=0$

$3x+9y+3z=0 \quad /\cdot 2$

$-6x-12y-3z=0$

$3x+9y+3z=0$

$-6y-3z=0 \Rightarrow \boxed{z=-2y}$

$\cancel{6y+3z=0}$

$x=-3y-z$

$x=-3y+2y=-y$

$$v=\begin{bmatrix}-y\\ y\\ -2y\end{bmatrix}=y\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}}_{v_1}$$

v_1 - база сопственог простора за соп. вр. $\lambda_1=-1$

$\underline{\lambda_2=2}$ $\quad v=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$

$Av=\lambda_2 v$

$(A-\lambda_2 I)v=0 \quad (A-2I)v=0$

$$\begin{bmatrix}-3 & -6 & -3\\ 3 & 6 & 3\\ -6 & -12 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$-3x-6y-3z=0 \quad \cdot(-2)$

$3x+6y+3z=0$

$-6x-12y-6z=0$

$0=0$

$0=0$

$\Rightarrow x=-2y-z, \quad y,z\in\mathbb{R}$

$$v=\begin{bmatrix}-2y-z\\ y\\ z\end{bmatrix}=y\underbrace{\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}}_{v_2}+z\underbrace{\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}}_{v_3}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\ \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \sim \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & -\tfrac{1}{2} & 1\end{bmatrix} \Rightarrow v_2, v_3 \text{ - лин. нез.}$$

v_2, v_3 - база сопственог простора за сопств. вр. $\lambda_2=2$

- v_1 је лин. нез. са v_2 и v_3 јер су то сопствени вектори за разне сопствене вр.

$\Rightarrow$ A (реда 3) има 3 лин. нез. сопствена вектора $\Rightarrow$ A дијагоналног типа

$$P_1 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1 \qquad \lambda = 2$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

задовољавају

$$D = P_1^{-1} A P_1$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -6 & -3 \\ 3 & 8 & 3 \\ -6 & -12 & -4 \end{bmatrix}$$

ПРОВЕРА

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] /\cdot 2 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] /\cdot 2 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] /\cdot(-1) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ /\cdot(-1) \\ /\cdot(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{matrix}}_{P^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \qquad P_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P_1^{-1} A P_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -6 & -3 \\ 3 & 8 & 3 \\ -6 & -12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -4 & -8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \checkmark$$

А нама треба P тд. $\underline{A = P^{-1} D P}$

имамо: $D = P_1^{-1} A P_1 \quad P_1 \cdot \quad / \cdot P_1^{-1}$

$P_1 D P_1^{-1} = A$ тј. $\underline{A = P_1 D P_1^{-1}}$

тражено P тд. $A = P^{-1} D P$ је $P = P_1^{-1}$

дакле $P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$