СВОЈСТВА ДЕТЕРМИНАНТИ

Т) Ако је матрица B добијена од матрице A

1° заменом места 2 врсте (колоне) матрице A

$\det B = -\det A$

2° множењем врсте (колоне) матрице A скаларом k

$\det B = k \cdot \det A$

3° тако што j-ту врсту (колону) матрице A множимо са k и додајемо i-тој врсти (колони)

$\det B = \det A$

- $\det A^T = \det A$
- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- ако A има нула врсту (колону) $\det A = 0$
- ако су две врсте (колоне) исте $\det A = 0$
- ако је $A = \begin{bmatrix} \ddots & \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$ - ГОРЊЕ-ТРОУГАОНА $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ - производ елемената са дијагонале.

$\det I = 1$

1.) Ако је A ортогонална $(A^T \cdot A = I)$ показати да је $\det A = \pm 1$

$$\left.\begin{array}{l} \det A^T A = \det A^T \cdot \det A = \det A \cdot \det A = (\det A)^2 \\ \det A^T A = \det I = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (\det A)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det A = \pm 1$$

2.) Израчунати:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ \boxed{1} & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /\cdot 2 \quad /\cdot(-2) \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \boxed{-1} & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} /\cdot 3 \quad /\cdot(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & -1 & 23 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -19 \\ -1 & 23 \end{vmatrix} =$$

$$= -(23 - 19) = -4$$

(П.3.)

3.) Израчунати:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{III}+2\text{I}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & -2 \\ 4 & -3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ \boxed{-1} & 7 & -2 \\ -3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{-1} & 7 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 8 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} /\cdot 2 \quad /\cdot(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 7 & -2 \\ 0 & 18 & -1 \\ 0 & -13 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 18 & \boxed{-1} \\ -13 & 8 \end{vmatrix} /\cdot 8 = -(18 \cdot 8 - 13) = -(144 - 13) = -131$$

4.)

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ /\cdot 2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -5 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{5+2} \begin{vmatrix} 4 & -5 & 8 & 9 \\ \boxed{1} & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ /\cdot(-4) \quad /\cdot(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & -3 & -10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 8 & -3 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 8 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -3(-2 \cdot 2 + 3 \cdot 4) = -3(-4 + 12)$$

$$= -24$$

5. (1.3.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & \boxed{1} & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} +,\ /\cdot(-2) \\ \\ \\ + \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ \boxed{1} & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ /\cdot(-3) \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -8 & -2 & 10 \\ 0 & -8 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -8 & -2 & 10 \\ -8 & -1 & 5 \\ \boxed{2} & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ /\cdot 4 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -6 & 14 \\ 0 & -5 & 9 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -6 & 14 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = -2(-54+70)$$

$$= -2\cdot 16 = \boxed{-32}$$

СВОЂЕЊЕ НА ТРОУГАОНИ ОБЛИК И ИЗВЛАЧЕЊЕ ЧИНИЛАЦА

6. Израчунати:

$$\det \begin{bmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} t+2 & -1 & 1 \\ t+2 & t-3 & 1 \\ 0 & -6 & t+4 \end{vmatrix} = (t+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & t-2 & 1 \\ 0 & t-2 & t+4 \end{vmatrix} = (t+2)(t-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t+4 \end{vmatrix} = (t+2)(t-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t+4 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{(t+2)(t-2)(t+4)}$$

7. Израчунати:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & x & \ddots & & \\ \vdots & & & & & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_{n\times n} = y\cdot(-1)^{1+n} \begin{vmatrix} y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \vdots & & & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \end{vmatrix}_{n-1} + x\cdot(-1)^{n+n} \begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & x \end{vmatrix}_{n-1} =$$

$$= y\cdot(-1)^{n+1} y^{n-1} + x\cdot(-1)^{2n} x^{n-1} =$$

$$= \underline{(-1)^{n+1} y^n + x^n}$$

8. Израчунати:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \cdots & n \\ \vdots & & & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} \begin{matrix} \\ + \\ + \\ \vdots \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & 8 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & 8 & \cdots & 2n \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \cdots & n \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = n!$$

9. Израчунати:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{све колоне} \\ \text{додамо првој}}}{=} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & & & \ddots & \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-1) \\ + \\ + \\ \vdots \\ + \end{matrix} =$$

$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

10. Израчунати довођењем на степенасти облик:

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ -2 & -3 & 1 \\ 5 & 10 & 15 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 \\ -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} /\cdot 2,\ /\cdot(-3) \\ + \\ + \end{matrix} = -5 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ /\cdot(-2) \\ + \end{matrix} = -5 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 17 \end{vmatrix} = -5\cdot(-17) =$$

$$= 85$$

11. Не израчунавајући det доказати да је $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

12. Нека је A квадратна матрица реда n. доказати $\det(nA) = n^n \det A$

АДЈУНГОВАНА МАТРИЦА

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$|M_{ij}|$ – МИНОР – прецртано i-ту врсту и j-ту колону

$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ КОФАКТОР

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow \text{МАТРИЦА КОФАКТОРА}$$

$$\operatorname{adj} A = \hat{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

(T) Neka je A kvadratna matrica.

- A je inverzibilna ako i samo ako $\det(A) \neq 0$.
- Ako je A inverzibilna tada je $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$.

увек +

$$\begin{matrix} \boxed{+} & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix} \leftarrow \text{као шаховска табла}$$

1. Нађи A^{-1}, ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$ $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-1 = 2$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2) = 1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-6 = -5$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & -5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(3-1) + (1-6) = 4-5 = -1$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Нека је $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -c & d \end{bmatrix}$ произвољна квадратна матрица реда 2.

а) Нађи $\operatorname{adj} A$

б) Показати да је $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = A$

а) $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

б) $\underline{\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)} = \operatorname{adj}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -c \\ b & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & b \\ -c & d \end{bmatrix} = \underline{A}$

КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \longleftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A\text{-матрица система}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B\text{-матрица слободних чланова}}$$

$\Delta = \det A$ – детерминанта система

$\Delta_{x_i} = \det C_i$

C_i – матрица од матрице A тако што i-ту колону заменимо са колоном сл. чланова (B)

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \ldots$$

(Т) • Систем има јединствено решење акко $\Delta \neq 0$ и тада је

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ \ldots, \ x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

• Ако је $\Delta = 0$, а неко $\Delta_{x_i} \neq 0$ систем нема решења.

НАПОМЕНА: ако је $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$ мора се решити систем на неки други начин!!!

ТЕОРЕМА СЕ ОДНОСИ И МОЖЕ СЕ ПРИМЕНИТИ САМО НА СИСТЕМЕ СА ИСТИМ БРОЈЕМ Ј-НА И НЕПОЗНАТИХ!!!

1. Решити систем:

$$ax - 2by = c \qquad ab \neq 0$$
$$3ax - 5by = 2c$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -2b \\ 3a & -5b \end{vmatrix} = -5ab + 6ab = ab \neq 0 \overset{(T)}{\Rightarrow} \text{систем има јединствено решење}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & -2b \\ 2c & -5b \end{vmatrix} = -5bc + 4bc = -bc \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-bc}{ab} = \boxed{-\frac{c}{a}}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ 3a & 2c \end{vmatrix} = 2ac - 3ac = -ac \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-ac}{ab} = \boxed{-\frac{c}{b}}$$

$$(x, y) = \left(-\frac{c}{a}, -\frac{c}{b}\right)$$

2. Решити систем:

$$3x + y - 2z = 3$$
$$x - 2y - 3z = 1$$
$$2x + 3y + z = 2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{matrix} = -6 - 6 - 6 - 8 + 27 - 1 = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \longrightarrow$ МОРА НА НЕКИ ДРУГИ НАЧИН!!! (ЗА ДОМАЋИ!)

3.

$$2x - 5y + 2z = 7$$
$$x + 2y - 4z = 3$$
$$3x - 4y - 6z = 5$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & -6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{matrix} = -24 + 60 - 8 - 12 - 32 - 30 = -46 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & -6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 7 & -5 \\ 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{matrix} = 7(-12-16) - 5(-20+18) + 2(-12-10) = -7 \cdot 28 + 5 \cdot 2 - 2 \cdot 22 = -196 + 10 - 44 = -230$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{matrix} = \ldots = -46$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -5 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{matrix} = \ldots = -46$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-230}{-46} =$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-46}{-46} = 1$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-46}{-46} =$$

4. За које k систем има јединствено решење?

$$\begin{aligned} kx + y + z &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ x + y + kz &= 1 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 + 1 + 1 - k - k - k = k^3 - 3k + 2 = (k-1)(k^2+k-2)$$
$$= (k-1)(k-1)(k+2)$$

$$\Delta = k^3 - 3k + 2 = (k-1)^2(k+2) \neq 0 \iff \boxed{k \neq 1 \wedge k \neq -2}$$

ТАДА ИМА ЈЕДИНСТВЕНО РЕШЕЊЕ

$\underline{k=1:}$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

∞ много решења

$\underline{k=-2:}$

$$\begin{aligned} -2x + y + z &= 1 \\ x - 2y + z &= 1 \quad /\cdot(-1) \quad /\cdot 2 \\ x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ 3y - 3z &= 0 \\ -3y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

$0 = 3$ $\lightning$

нема решења

$\underline{k \neq 1,\ k \neq -2}$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} /\cdot(-1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k-1)^2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} /\cdot(-k) \quad /\cdot(-1) = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k & 1-k \\ 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = -(1-k)(k-1) = (k-1)^2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} /\cdot(-1) = \begin{vmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (k-1)^2$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{(k-1)^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{1}{k+2}$$

$$y = \frac{1}{k+2}$$

$$z = \frac{1}{k+2}$$

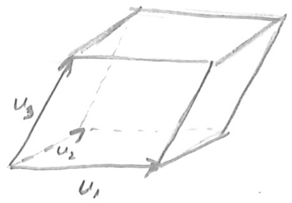
ЗАПРЕМИНА ПАРАЛЕЛОПИПЕДА

u_1, u_2, u_3 – вектори из $\mathbb{R}^3$

$u_1 = (a_1, b_1, c_1)$

$u_2 = (a_2, b_2, c_2)$

$u_3 = (a_3, b_3, c_3)$



S – паралелопипед разапет над векторима u_1, u_2, u_3.

$$V(S) = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|$$

$V(S) = 0$ акко вектори u_1, u_2 и u_3 припадају истој равни, тј.
акко су u_1, u_2 и u_3 линеарно зависни.

1. Нађи запремину паралелопипеда у $\mathbb{R}^3$ разапет над векторима:

$u_1 = (1, 2, 4)$

$u_2 = (2, 1, -3)$

$u_3 = (5, 7, 9)$

$$V(S) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 9 & 5 & 7 \end{array} \right| = 9 - 30 + 56 - 20 + 21 - 36$$

$$= 0$$

ПОЛИНОМИ И МАТРИЦЕ

$f(t) \in \mathbb{K}[t]$ – полином са коефицијентима из поља $\mathbb{K}$

$f(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$ A – квадратна матрица над пољем $\mathbb{K}$

$f(A) := a_n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 \cdot I$

Кажемо да је A нула полинома $f(t)$ ако је $f(A) = 0$.

(1.) Показати да матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ поништава полином $f(t) = t^2 - 6t + 13$.

$f(A) = A^2 - 6A + 13I$

$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow f(A) = \begin{bmatrix} -7 & 12 \\ 24 & 17 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + 13\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -7 & 12 \\ 24 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 24 & 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

КАРАКТЕРИСТИЧНИ ПОЛИНОМ

A – квадратна матрица реда n $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$A - tI = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - t\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-t \end{bmatrix}$ / det

$\varphi_A(t) = \det(A - tI)$ ← КАРАКТЕРИСТИЧНИ ПОЛИНОМ МАТРИЦЕ A

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\quad \varphi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-t \end{vmatrix} = (a_{11}-t)(a_{22}-t) - a_{12}a_{21} =$

$= t^2 - (a_{11}+a_{22})t + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$

$= t^2 - (\mathrm{tr} A)\cdot t + \det A$ полином 2. степена

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $\quad \varphi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-t & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-t \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11}-t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-t \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$

$= (a_{11}-t)(a_{22}-t)(a_{33}-t) + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$

$- a_{13}(a_{22}-t)a_{31} - (a_{11}-t)a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}(a_{33}-t) =$

$= -t^3 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})t^2 + (\quad \ldots$

$= -t^3 + (\mathrm{tr} A)t^2 - \underbrace{(A_{11}+A_{22}+A_{33})}_{\text{КОФАКТОРИ}}t + \det A$ полином 3. степена

A – реда n $\Rightarrow$ $\varphi_A(t)$ је полином n-тог степена

(T) (КЕЈЛИ- ХАМИЛТОН)
Свака квадратна матрица поништава свој карактеристични полином, тј. $\varphi_A(A) = 0$.

Деф. Матрице A и B су сличне АККО постоји инверзибилна матрица P т.д. $B = P^{-1}AP$
$A \sim B$

(T) Сличне матрице имају исти карактеристични полином.

A и B сличне $\Leftrightarrow$ $B = P^{-1}AP$

$\varphi_A(t) = \det(A - tI)$

$$\varphi_B(t) = \det(B - tI) = \det(P^{-1}AP - t\underset{P^{-1}P}{I}) = \det(P^{-1}AP - tP^{-1}IP) =$$

$$= \det(P^{-1}(A - tI)P) =$$

$$= \det(P^{-1}) \det(A - tI) \det P$$

$$= \det(A - tI) \det(P^{-1}) \det P =$$

$$= \det(A - tI) \underbrace{\det(P^{-1}P)}_{=E} = \varphi_A(t)$$

(2) Наћи карактеристичан полином матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 1-t & 6 & -2 \\ -3 & 2-t & 0 \\ 0 & 3 & -4-t \end{vmatrix} \begin{matrix} 1-t & 6 \\ -3 & 2-t \\ 0 & 3 \end{matrix} = (1-t)(2-t)(-4-t) + 0 + 18$$

$$- 0 - 0 + (-4-t)(+3)\cdot 6 =$$

$$= (1-t)(-8 - 2t + 4t + t^2) + 18 - 18t - 72$$

$$= (1-t)(t^2 + 2t - 8) - 18t - 54$$

$$= t^2 + 2t - 8 - t^3 - 2t^2 + 8t - 18t - 54$$

$$= -t^3 - t^2 - 8t - 62$$

(3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2-t & 8 & -6 \\ 0 & 0 & 3-t & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t)(3-t)(4-t)$$

СОПСТВЕНЕ ВРЕДНОСТИ И СОПСТВЕНИ ВЕКТОРИ

Деф. Нека је A квадратна матрица реда n над пољем $\mathbb{K}$. Скалар $\lambda \in \mathbb{K}$ зовемо СОПСТВЕНОМ ВРЕДНОШЋУ матрице A акко

$$\exists v \in \mathbb{K}^n,\ v \neq 0 \quad \text{т.д. је} \quad Av = \lambda v$$

нула вектор

$$\underset{n\times n}{A} \underset{n\times 1}{\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}} = \lambda \underset{n\times 1}{\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}}$$

Такво v се зове СОПСТВЕНИ ВЕКТОР који одговара сопственој вредности λ.

- Скуп свих вектора v који су сопствени вектори за сопствену вредност λ је један потпростор $\mathbb{K}^n$ који се зове сопствени простор за сопствену вредност λ.

E_λ - сопствени простор са сопствену вр. λ $\quad E_\lambda = \{ v \mid Av = \lambda v \}$

1° $0_v \in E_\lambda$ јер $A \cdot 0 = \lambda \cdot 0 \iff 0 = 0$ ✓

2° $u, v \in E_\lambda$

$Au = \lambda u$
$Av = \lambda v$ $\quad \Rightarrow \underline{A(u+v)} = Au + Av = \lambda u + \lambda v = \underline{\lambda(u+v)} \quad \Rightarrow u + v \in E_\lambda$

3° $v \in E_\lambda,\ a \in \mathbb{K}$
$Av = \lambda v$ $\quad A(av) = aAv = a\lambda v = \lambda(av) \quad \Rightarrow av \in E_\lambda$

(Т) λ је сопствена вредност матрице A акко је λ нула карактеристичног полинома $\varphi_A(t)$, тј. $\varphi_A(\lambda) = 0$

$\circ\ Av = \lambda v$
$\iff Av - \lambda v = 0$
$\iff (A - \lambda I)v = 0$ $\quad$ па сопствени вектор v за сопствену вредност λ добијамо решавањем хомогеног система ј-на $(A - \lambda I)v = 0$.

(Т) Различитим сопственим вредностима $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ одговарају линеарно независни сопствени вектори.

- Неке матрице немају сопствене вредности и векторе над $\mathbb{R}$, али све матрице над пољем $\mathbb{C}$ имају бар једну сопствену вредност.

ДИЈАГОНАЛИЗАЦИЈА МАТРИЦЕ

Деф. Матрица A је дијагоналног типа ако је слична дијагоналној матрици D тј. ако постоји инвертибилна P тако да је $D = P^{-1}AP$.

$\cdot P \qquad$ ↑ дијагонална $\quad / \cdot P^{-1}$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^m = (PDP^{-1})^m = \underbrace{P D \underbrace{P^{-1} P}_{I} D P^{-1} \cdots P D P^{-1}}_{m} = PD^m P^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \Rightarrow D^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & & 0 \\ & \lambda_2^m & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^m \end{bmatrix}$$

(Т) A реда n је слична дијагоналној акко A има n линеарно независних сопствених вектора. У том случају ће на дијагонали матрице D бити баш сопствене вредности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ а колоне матрице P ће бити сопствени вектори.