① Нађи матрицу линеарних оператора $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ у односу на канонску базу $E$ простора $\mathbb{R}^3$, и у односу на базу $S=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(1,2,3),\ u_3=(1,3,5)\}$

а) $T(x,y,z)=(x,y,0)$

б) $T(x,y,z)=(2x-7y-4z,\ 3x+y+4z,\ 6x-8y+z)$

в) $T(x,y,z)=(z,\ y+z,\ x+y+z)$

• канонска база за $\mathbb{R}^3$ је $E=\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$

а) $T(e_1)=(1,0,0)=1\cdot e_1+0\cdot e_2+0\cdot e_3$

$T(e_2)=(0,1,0)=0\cdot e_1+1\cdot e_2+0\cdot e_3$

$T(e_3)=(0,0,0)=0\cdot e_1+0\cdot e_2+0\cdot e_3$

$$[T]_E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$[T(e_1)]_E \quad [T(e_2)]_E \quad [T(e_3)]_E$

б) $T(e_1)=(2,3,6)=2\cdot e_1+3\cdot e_2+6\cdot e_3$

$T(e_2)=(-7,1,-8)=-7e_1+e_2-8e_3$

$T(e_3)=(-4,4,1)=-4e_1+4e_2+e_3$

$$[T]_E=\begin{bmatrix}2&-7&-4\\3&1&4\\6&-8&1\end{bmatrix}$$

в) $T(e_1)=(0,0,1)=e_3$

$T(e_2)=(0,1,1)=e_2+e_3$

$T(e_3)=(1,1,1)=e_1+e_2+e_3$

$$[T]_E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

• у односу на базу $S=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(1,2,3),\ u_3=(1,3,5)\}$

а) $T(x,y,z)=(x,y,0)$

$T(u_1)=T(1,1,0)=(1,1,0)=u_1$

$T(u_2)=T(1,2,3)=(1,2,0)=$

$=(-1+2\cdot2)u_1+(5\cdot1-5\cdot2)u_2+(-3\cdot1+3\cdot2)u_3=$

$=3u_1-5u_2+3u_3$

$T(u_3)=T(1,3,5)=(1,3,0)=$

$=(-1+2\cdot3)u_1+(5\cdot1-5\cdot3)u_2+(-3\cdot1+3\cdot3)u_3=$

$=5u_1-10u_2+6u_3$

$$[T]_S=\begin{bmatrix}1&3&5\\0&-5&-10\\0&3&6\end{bmatrix}$$

$T(a,b,c)=x\cdot u_1+y\cdot u_2+z\cdot u_3=x(1,1,0)+y(1,2,3)+z(1,3,5)$

произвољан вектор

координате вектора у бази $[u_1,u_2,u_3]=S$

$\boxed{x}+y+z=a \ /\cdot(-1)$

$x+2y+3z=b$

$3y+5z=c$

$\boxed{y}+2z=b-a \ /\cdot(-3)$

$3y+5z=c$

$-z=3a-3b+c \Rightarrow z=-3a+3b-c$

$y=b-a-2z=b-a+6a-6b+2c$

$=5a-5b+2c$

$x=a-y-z=a-(5a-5b+2c)-(-3a+3b-c)=$

$=-a+2b-c$

$(a,b,c)=\underline{(-a+2b-c)}u_1+\underline{(5a-5b+2c)}u_2+\underline{(-3a+3b-c)}u_3$

б) $T(x,y,z)=(2x-7y-4z,\ 3x+y+4z,\ 6x-8y+z)$

$T(u_1)=T(1,1,0)=(2-7,\ 3+1,\ 6-8)=(-5,4,-2)=$

$=(5+8+2)u_1+(-25-20-4)u_2+(15+12+2)u_3=$

$=15u_1-49u_2+29u_3$

$T(u_2)=T(1,2,3)=(2-14-12,\ 3+2+12,\ 6-16+3)=(-24,17,-7)=$

$=(24+34+7)u_1+(\underset{-120}{-5\cdot24}\underset{+85}{-5\cdot17}\underset{-14}{-14})u_2+(\underset{72}{3\cdot24}+\underset{51}{3\cdot17}+\underset{7}{7})u_3=$

$=65u_1-219u_2+130u_3$

$T(u_3)=T(1,3,5)=(1-21-20,\ 3+3+20,\ 6-24+5)=(-40,26,-13)=$

$=(40+52+13)u_1+(\underset{200}{-5\cdot40}\underset{130}{-5\cdot26}\underset{36}{-2\cdot13})u_2+(120+\underset{78}{3\cdot26}+13)u_3=$

$=105u_1-366u_2+211u_3$

$$[T]_S=\begin{bmatrix}15&65&105\\-49&-219&-366\\29&130&211\end{bmatrix}$$

в) $T(x,y,z)=(z,\ y+z,\ x+y+z)$

$T(u_1)=T(1,1,0)=(0,1,2)=(2-2)u_1+(-5+4)u_2+(3-2)u_3=0\cdot u_1-u_2+u_3$

$T(u_2)=T(1,2,3)=(3,5,6)=(-3+10-6)u_1+(15-25+12)u_2+(-9+15-6)u_3=u_1+2u_2+0\cdot u_3$

$T(u_3)=T(1,3,5)=(5,8,9)=(-9+16-5)u_1+(25-40+18)u_2+(-15+24-9)u_3=2u_1+3u_2+0\cdot u_3$

$$[T]_S=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&2&3\\1&0&0\end{bmatrix}$$

2\. Нека је $D$ диференцијални оператор

$$D(f)=\frac{df}{dt}=f'_t$$

Нађи матрицу оператора $D$ у бази

а) $E=\{\underset{e_1}{e^{5t}},\ \underset{e_2}{te^{5t}},\ \underset{e_3}{t^2e^{5t}}\}$

б) $F=\{\underset{f_1}{1},\ \underset{f_2}{t},\ \underset{f_3}{\sin 3t},\ \underset{f_4}{\cos 3t}\}$

а)
$$D(e^{5t})=(e^{5t})'=5\cdot e^{5t}=5e_1$$
$$D(te^{5t})=(te^{5t})'=1\cdot e^{5t}+t\cdot 5\cdot e^{5t}=e_1+5e_2$$
$$D(t^2e^{5t})=2te^{5t}+t^2\cdot 5e^{5t}=2e_2+5e_3$$

$$[D]_e=\begin{bmatrix}5&1&0\\0&5&2\\0&0&5\end{bmatrix}$$

б)
$$D(1)=0$$
$$D(t)=1=1\cdot f_1$$
$$D(\sin 3t)=3\cos 3t=3f_4$$
$$D(\cos 3t)=-3\sin 3t=-3f_3$$

$$[D]_e=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\\0&0&3&0\end{bmatrix}$$

3\. Нека је $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $T(z)=\bar z$ $(T(x+iy)=x-iy)$ линеарни оператор. Нађи матрицу оператора $T$ у бази

а) $E=\{1,i\}$

б) $F=\{1+i,1+2i\}$

а)
$$T(1)=1=1\cdot e_1$$
$$T(i)=-i=-1\cdot e_2$$

$$[T]_E=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

б)
$$T(1+i)=1-i$$
$$T(1+2i)=1-2i$$

$$Tz=a(1+i)+b(1+2i)$$
$$x+iy=a+b+i(a+2b)\Rightarrow\begin{cases}a+b=x & /\cdot(-1)\\ a+2b=y\end{cases}+$$
$$b=y-x$$
$$a=x-b=x-y+x=2x-y$$

$$\Rightarrow x+iy=\underbrace{(2x-y)}(1+i)+\underbrace{(y-x)}(1+2i)$$

координате произвољног вектора у бази $F$.

$$T(1+i)=1-i=(2+1)(1+i)+(-2)(1+2i)=3(1+i)-2(1+2i)\qquad x=1,\ y=-1$$

$$T(1+2i)=1-2i=4(1+i)+(-3)(1+2i)\qquad x=1,\ y=-2$$

$$[T]_E=\begin{bmatrix}3&4\\-2&-3\end{bmatrix}$$

4\. Нека је $V=M_2(\mathbb{R})$ и $M=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ дата матрица. Нађи матрице следећих линеарних оператора $T:V\to V$ у односу на канонску базу простора $V$.

а) $T(A)=MA$

б) $T(A)=AM$

в) $T(A)=MA-AM$

канонска база: $E_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $E_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $E_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $E_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

а)
$$T(E_1)=M\cdot E_1=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\c&0\end{bmatrix}=a\cdot E_1+c\cdot E_3$$
$$T(E_2)=M\cdot E_2=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a\\0&c\end{bmatrix}=aE_2+cE_4$$
$$T(E_3)=M\cdot E_3=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&0\\d&0\end{bmatrix}=bE_1+dE_3$$
$$T(E_4)=M\cdot E_4=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&b\\0&d\end{bmatrix}=bE_2+dE_4$$

$$[T]_E=\begin{bmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{bmatrix}$$

б) ...

# ПРОМЕНА БАЗЕ

$S=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ база за $V$

$S'=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ друга база за $V$

$$v_1=a_{11}u_1+a_{21}u_2+\dots+a_{n1}u_n$$
$$\vdots$$
$$v_n=a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\dots+a_{nn}u_n$$

$$P=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\\ \uparrow \quad\quad \uparrow \quad\quad\quad \uparrow\\ [v_1]_S \quad [v_2]_S \quad\quad [v_n]_S\end{array}$$ ← матрица преласка са базе $S$ на $S'$

$$\underset{1\times n}{[v_1\ v_2 \dots v_n]}=\underset{1\times n}{[u_1\ u_2\dots u_n]}\underset{n\times 1}{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}}$$

$$S'=S\cdot P$$

- $v=\underline{S\cdot[v]_S}=[u_1\dots u_n]\begin{bmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{bmatrix}$ $\qquad v=d_1u_1+\dots+d_nu_n$

$v=S'\cdot[v]_{S'}=\underline{S\cdot P\cdot[v]_{S'}}$ $\quad\Rightarrow\quad S\cdot P\cdot[v]_{S'}=S\cdot[v]_S$

$\Rightarrow\quad P\cdot[v]_{S'}=[v]_S$

$$\boxed{[v]_S=P\cdot[v]_{S'}}$$
$$\boxed{[v]_{S'}=P^{-1}[v]_S}$$

(Т) Нека је $T: V\to V$ линеарни оператор векторског простора $V$ и $P$ матрица преласка са базе $S$ на базу $S'$. Тада је
$$[T]_{S'}=P^{-1}[T]_S\cdot P$$

(1) Дате су две базе од $\mathbb{R}^2$

$E=\{e_1=(1,0),\ e_2=(0,1)\}$, $\quad S=\{u_1=(1,2),\ u_2=(2,3)\}$

а) Наћи матрицу преласка $P$ са базе $E$ на $S$ и матрицу $Q$ са $S$ на $E$. Проверити да је $Q=P^{-1}$.

б) За линеарни оператор $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(2x-3y,\ x+y)$, одредити матрице $[T]_E$ и $[T]_S$

а) $u_1=(1,2)=1\cdot e_1+2\cdot e_2$
$u_2=(2,3)=2\cdot e_1+3\cdot e_2$ $\quad\Rightarrow\quad \boxed{P=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}}$
$\qquad\qquad [u_1]_E\ [u_2]_E$

$\det P=\det\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}=3-4=-1$

$\Rightarrow\quad P^{-1}=\dfrac{1}{\det P}\begin{bmatrix}3&-2\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix}$

$e_1=(1,0)=x\cdot u_1+y\cdot u_2=x(1,2)+y(2,3)$

$x+2y=1\quad /\cdot(-2)$

$2x+3y=0$

$-y=-2\quad\Rightarrow\quad \boxed{y=2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=-3}$

$e_2=(0,1)=x\cdot u_1+y\cdot u_2=x(1,2)+y(2,3)$

$x+2y=0\quad /\cdot(-2)$

$2x+3y=1$

$-y=1\quad\Rightarrow\quad\boxed{y=-1}\quad\Rightarrow\quad\boxed{x=2}$

$\Rightarrow\quad \boxed{Q=\begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix}}$
$\qquad [e_1]_S\ [e_2]_S$

б) $T(e_1)=T(1,0)=(2,1)=2e_1+e_2$

$T(e_2)=T(0,1)=(-3,1)=-3e_1+e_2$

$\boxed{[T]_E=\begin{bmatrix}2&-3\\1&1\end{bmatrix}}$
$\qquad [T(e_1)]_E\ [T(e_2)]_E$

$T(u_1)=T(1,2)=(2-6,\ 1+2)=(-4,3)=(12+6)u_1+(-8-3)u_2$
$=18u_1-11u_2$

$T(u_2)=T(2,3)=(4-9,\ 5)=(-5,5)=(15+10)u_1+(-10-5)u_2$
$=25u_1-15u_2$

$\Rightarrow\quad\boxed{[T]_S=\begin{bmatrix}18&25\\-11&-15\end{bmatrix}}$

$T(a,b)=x\cdot u_1+y\,u_2=x(1,2)+y(2,3)$

$x+2y=a\quad/\cdot(-2)$

$2x+3y=b$

$-y=b-2a\quad\Rightarrow\quad y=2a-b$

$x=a-2y=a-4a+2b=-3a+2b$

$\Rightarrow\quad (a,b)=\underline{(-3a+2b)}u_1+\underline{(2a-b)}u_2$

координате у бази $S$

$$[T]_S = P^{-1}[T]_E P = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 11 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 25 \\ -11 & -15 \end{bmatrix}$$

$F : V \to U$
$S = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ baza za $V$
$S' = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ baza za $U$
Tada $F(v_1), ..., (v_m) \in U$ i mogu se predstaviti kao linearne kombinacije baznih vektora $u_1, u_2, ..., u_n$.

$$F(v_1) = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{n1}u_n$$
$$\vdots$$
$$F(v_m) = a_{1m}u_1 + a_{2m}u_2 + ... + a_{nm}u_n$$

Matrica preslikavanje $F$ u odnosu na baza $S$ i $S'$ je:

$$[F]_S^{S'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

(2) Нека је $S=\{u_1,u_2\}$ база за $V$ и $T: V \to V$ линеарни оператор за који је
$T(u_1) = 3u_1 - 2u_2$
$T(u_2) = u_1 + 4u_2$
Нека је $S'=\{w_1, w_2\}$ друга база за $V$ где је $w_1 = u_1 + u_2$, $w_2 = 2u_1 + 3u_2$. Наћи матрицу оператора $T$ у бази $S'$!

$$[T]_S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{3-2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{S'} = P^{-1}[T]_S P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(3) Нека је $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ линеарно пресликавање дефинисано са $F(x,y,z) = (2x+y-z,\ 3x-2y+4z)$. Наћи матрицу пресликавања $F$ у односу на базе $S$ и $S'$ простора $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$

$S = \{ w_1 = (1,1,1),\ w_2 = (1,1,0),\ w_3 = (1,0,0) \}$
$S' = \{ v_1 = (1,3),\ v_2 = (1,4) \}$

$(a,b) = xv_1 + yv_2$
$= x(1,3) + y(1,4)$
$x + y = a \ / \cdot(-3)$
$3x + 4y = b$
$y = b - 3a \Rightarrow x = a - y = a - b + 3a = 4a - b$
$(a,b) = \underline{(4a-b)}\, v_1 + \underline{(-3a+b)}\, v_2$
координате у бази $S'$

$F(w_1) = F(1,1,1) = (2+1-1,\ 3-2+4) = (2,5) =$
$= (8-5)v_1 + (-6+5)v_2 = 3v_1 - v_2$
$F(w_2) = F(1,1,0) = (2+1,\ 3-2) = (3,1) =$
$= (12-1)v_1 + (-9+1)v_2 = 11v_1 - 8v_2$
$F(w_3) = F(1,0,0) = (2,3) =$
$= (8-3)v_1 + (-6+3)v_2 = 5v_1 - 3v_2$

$$\Rightarrow \boxed{[F]_S^{S'} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}}$$

(4) Наћи матрицу линеарног пресликавања $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z) = (2x-4y+9z,\ 5x+3y-2z)$ у односу на канонске базе простора $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$.

$E = \{ \underset{e_1}{(1,0,0)}, \underset{e_2}{(0,1,0)}, \underset{e_3}{(0,0,1)} \}$ канонска база за $\mathbb{R}^3$
$E' = \{ \underset{e_1'}{(1,0)}, \underset{e_2'}{(0,1)} \}$ канонска база за $\mathbb{R}^2$

$F(e_1) = F(1,0,0) = (2,5) = 2e_1' + 5e_2'$
$F(e_2) = F(0,1,0) = (-4,3) = -4e_1' + 3e_2'$
$F(e_3) = F(0,0,1) = (9,-2) = 9e_1' - 2e_2'$

$$[F]_E^{E'} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

5. (I кол. 2006/2007.)

Ако је линеарни оператор $L$ простора $\mathbb{R}^3$ задат са $L(x,y,z)=(x+y,\ x+2y+2z,\ x+2y+5z)$

а) Одредити матрицу оператора $L$ у односу на канонску базу $E=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$.

б) Доказати да је оператор $L$ инвертибилан.

в) Одредити матрицу оператора $L^{-1}$ у односу на канонску базу $E=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$.

а) $L(e_1)=L(1,0,0)=(1,1,1)=1\cdot e_1+1\cdot e_2+1\cdot e_3$

$L(e_2)=L(0,1,0)=(1,2,2)=1\cdot e_1+2\cdot e_2+2\cdot e_3$

$L(e_3)=L(0,0,1)=(0,2,5)=0\cdot e_1+2\cdot e_2+5\cdot e_3$

$$[L]_E=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&2\\1&2&5\end{bmatrix}$$

$[L(e_1)]_E \quad [L(e_2)]_E \quad [L(e_3)]_E$

$v=(x,y,z)$

$[v]_E=[(x,y,z)]_E=x\cdot e_1+y\cdot e_2+z\cdot e_3$

$L(v)=[L]_E\cdot[v]_E=$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&2\\1&2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y\\x+2y+2z\\x+2y+5z\end{bmatrix}$$

б) $L$ - инвертибилан $\Leftrightarrow \ker L=\{0_v\}$

$\ker L=\{v\in\mathbb{R}^3 \mid L(v)=0_v\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid L(x,y,z)=(0,0,0)\}$

$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x+y,\ x+2y+2z,\ x+2y+5z)=(0,0,0)\}$

$$\begin{aligned}\boxed{x}+y&=0 \quad /\cdot(-1)\\ x+2y+2z&=0\\ x+2y+5z&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x+y&=0\\ \boxed{y}+2z&=0 \quad /\cdot(-1)\\ y+5z&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x+y&=0\\ y+2z&=0\\ 3z&=0 \Rightarrow z=0\end{aligned} \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=0$$

$\Rightarrow \ker L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=y=z=0\}$

$=\{(0,0,0)\}$

$\Rightarrow L$ је инвертибилан

$\Rightarrow \exists L^{-1}$

в) I начин

$L(x,y,z)=(a,b,c) \quad \overset{?}{\rightsquigarrow} \quad (x,y,z)=L^{-1}(a,b,c)$

$(x+y,\ x+2y+2z,\ x+2y+5z)=(a,b,c)$

$$\begin{aligned}\boxed{x}+y&=a \quad /\cdot(-1)\\ x+2y+2z&=b\\ x+2y+5z&=c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x+y&=a\\ \boxed{y}+2z&=b-a \quad /\cdot(-1)\\ y+5z&=c-a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x+y&=a\\ y+2z&=b-a\\ 3z&=c-a-(b-a)\end{aligned}$$

$\Rightarrow 3z=c-b$

$\Rightarrow z=\boxed{\dfrac{c-b}{3}}$

$\Rightarrow y=b-a-2z$

$=b-a-\dfrac{2c-2b}{3}$

$=\boxed{\dfrac{5b-3a-2c}{3}}$

$\Rightarrow x=a-y$

$=a-\dfrac{5b-3a-2c}{3}$

$=\dfrac{3a-5b+3a+2c}{3}$

$=\boxed{\dfrac{6a-5b+2c}{3}}$

$L^{-1}(a,b,c)=\left(\dfrac{6a-5b+2c}{3}, \dfrac{-3a+5b-2c}{3}, \dfrac{-b+c}{3}\right)$

$L^{-1}(e_1)=L^{-1}(1,0,0)=\left(\frac{6}{3},\frac{-3}{3},0\right)=(2,-1,0)=2e_1-1\cdot e_2+0\cdot e_3$

$L^{-1}(e_2)=L^{-1}(0,1,0)=\left(\frac{-5}{3},\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)=-\frac{5}{3}e_1+\frac{5}{3}e_2-\frac{1}{3}e_3$

$L^{-1}(e_3)=L^{-1}(0,0,1)=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}e_1-\frac{2}{3}e_2+\frac{1}{3}e_3$

$$[L^{-1}]_E=\begin{bmatrix}2&-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}\\-1&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

II начин

$[L^{-1}]_E=[L]_E^{-1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}\boxed{1}&1&0&1&0&0\\1&2&2&0&1&0\\1&2&5&0&0&1\end{array}\right]/\cdot(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&\boxed{1}&2&-1&1&0\\0&1&5&-1&0&1\end{array}\right]/\cdot(-1)$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&\boxed{3}&0&-1&1\end{array}\right]/\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&-1&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&3&0&-1&1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\/\cdot(-1)\\/:3\end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}\\0&1&0&-1&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\0&0&1&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right] \Rightarrow [L]_E^{-1}=\begin{bmatrix}2&-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}\\-1&\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

6. (I колоквиум 2010/2011.) $\boxed{2.}$

Нека је $L:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање векторских простора $\mathbb{R}^4$ у $\mathbb{R}^3$ дефинисано са
$L(a,b,c,d)=(a+3b+5c+9d,\ a+b+c-d,\ a+2b+3c+4d)$

а) Одредити матрицу пресликавања $L$ у односу на пар канонских база простора $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$.

б) Одредити ранг, дефект и неке базе језгра и слике датог пресликавања $L$.

а) $E=\{e_1=(1,0,0,0),\ e_2=(0,1,0,0),\ e_3=(0,0,1,0),\ e_4=(0,0,0,1)\}$ - канонска база за $\mathbb{R}^4$

$F=\{f_1=(1,0,0),\ f_2=(0,1,0),\ f_3=(0,0,1)\}$ - канонска база за $\mathbb{R}^3$

$L(e_1)=L(1,0,0,0)=(1+3\cdot0+5\cdot0+9\cdot0,\ 1+0+0-0,\ 0+2\cdot0+3\cdot0+4\cdot0)=$
$=\underline{(1,1,1)}=1\cdot f_1+1\cdot f_2+1\cdot f_3$

$L(e_2)=L(0,1,0,0)=\underline{(3,1,2)}=3\cdot f_1+1\cdot f_2+2\cdot f_3$

$L(e_3)=L(0,0,1,0)=\underline{(5,1,3)}=5 f_1+1\cdot f_2+3\cdot f_3$

$L(e_4)=L(0,0,0,1)=\underline{(9,-1,4)}=9f_1-1f_2+4\cdot f_3$

$$[L]_E^F=\begin{bmatrix}1&3&5&9\\1&1&1&-1\\1&2&3&4\end{bmatrix}$$

$[L(e_1)]_F$ $\quad [L(e_2)]_F$ $\quad [L(e_3)]_F$ $\quad [L(e_4)]_F$

б) $L:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^4=\mathcal{L}(e_1,e_2,e_3,e_4)$

(T) $\Rightarrow \operatorname{Im}L=\mathcal{L}(\underbrace{L(e_1)}_{=g_1},\underbrace{L(e_2)}_{=g_2},\underbrace{L(e_3)}_{=g_3},\underbrace{L(e_4)}_{=g_4})$

$\Rightarrow \underbrace{(1,1,1)}_{=g_1},\ \underbrace{(3,1,2)}_{=g_2},\ \underbrace{(5,1,3)}_{=g_3},\ \underbrace{(9,-1,4)}_{=g_4}$ – генератори $\operatorname{Im}L$

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&1&1\\3&1&2\\5&1&3\\9&-1&4\end{bmatrix}\ /\cdot(-3),\ /\cdot(-5),\ /\cdot(-9)\ \sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&\boxed{-2}&-1\\0&-4&-2\\0&-10&-5\end{bmatrix}\ /\cdot(-2),\ /\cdot(-5)\ \sim\begin{bmatrix}\boxed{1}&1&1\\0&\boxed{-2}&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow g_1=(1,1,1)$ и $g_2=(3,1,2)$ су лин. нез.
$g_3,g_4\in\mathcal{L}(g_1,g_2)$

$\Rightarrow \operatorname{Im}L=\mathcal{L}(g_1,g_2,g_3,g_4)=\mathcal{L}(g_1,g_2)$
$g_1,g_2$ - лин. нез.

$\Rightarrow [g_1,g_2]$ - база за $L$

$\Rightarrow \dim\operatorname{Im}L=\boxed{\rho(L)=2}$

$\operatorname{Ker}L=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid L(a,b,c,d)=0_V\}$
$=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid (a+3b+5c+9d,\ a+b+c-d,\ a+2b+3c+4d)=(0,0,0)\}$

$\boxed{a}+3b+5c+9d=0\ /\cdot(-1)$
$a+b+c-d=0$
$a+2b+3c+4d=0$

$a+3b+5c+9d=0$
$\boxed{-2b}-4c-10d=0\ /\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$
$-b-2c-5d=0$

$a+3b+5c+9d=0$
$-b-2c-5d=0$ $\Rightarrow$ $b=-2c-5d$
$0=0$ $\quad a=-3b-5c-9d=-3(-2c-5d)-5c-9d$
$=c+6d$

$\operatorname{Ker}L=\{(c+6d,-2c-5d,c,d)\mid c,d\in\mathbb{R}\}=\{c\underbrace{(1,-2,1,0)}_{=l_1}+d\underbrace{(6,-5,0,1)}_{=l_2}\mid c,d\in\mathbb{R}\}=\mathcal{L}(l_1,l_2)$

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&-2&1&0\\6&-5&0&1\end{bmatrix}\ /\cdot(-6)\ \sim\begin{bmatrix}\boxed{1}&-2&1&0\\0&\boxed{7}&-6&1\end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ лин. нез. су

$\Rightarrow [l_1,l_2]$ - база за $\operatorname{Ker}L$

$\Rightarrow \dim\operatorname{Ker}L=\boxed{\delta(L)=2}$

7. Нека је $\boxed{3.1}$ $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ линеарни оператор векторског простора $\mathbb{R}^3$ дефинисан са

$$L(x,y,z)=(2x+y+z,\ x+y+3z,\ x+y+2z)$$

а) Одредити матрицу оператора $L$ у односу на канонску базу $e$ простора $\mathbb{R}^3$

б) Испитати да ли је $L$ инвертибилан и у случају да јесте одредити матрицу оператора $L^{-1}$ у односу на базу $e$.

а) $e=\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$ - канонска база за $\mathbb{R}^3$

$$L(e_1)=L(1,0,0)=(2,1,1)=2e_1+e_2+e_3$$
$$L(e_2)=L(0,1,0)=(1,1,1)=e_1+e_2+e_3$$
$$L(e_3)=L(0,0,1)=(1,3,2)=e_1+3e_2+2e_3$$

$$[L]_e=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&1&3\\1&1&2\end{bmatrix}$$

$\uparrow$ $[L(e_1)]_e$

б) $L$-инвертибилан $\Leftrightarrow$ $\ker L=\{0_V\}$

$$\ker L=\{v\in\mathbb{R}^3\mid L(v)=0_V\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid L(x,y,z)=(0,0,0)\}$$
$$=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid(2x+y+z,\ x+y+3z,\ x+y+2z)=(0,0,0)\}$$
$$=\{(0,0,0)\}$$

$\Rightarrow$ $L$-инвертибилан

$$\begin{aligned}2x+y+z&=0\\ \boxed{x}+y+3z&=0\\ x+y+2z&=0\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}\boxed{x}+y+3z&=0\ /\cdot(-2)\ /\cdot(-1)\\ 2x+y+z&=0\\ x+y+2z&=0\end{aligned}$$

---

$-y-5z=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=0$

$-z=0 \Rightarrow z=0$

$$L(x,y,z)=(a,b,c)\ \Leftrightarrow\ (2x+y+z,\ x+y+3z,\ x+y+2z)=(a,b,c)$$

$L^{-1}$

$$L^{-1}\circ L(x,y,z)=L^{-1}(a,b,c)$$
$$(x,y,z)=L^{-1}(a,b,c)$$

$$\begin{aligned}2x+y+z&=a\\ x+y+3z&=b\\ x+y+2z&=c\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}\boxed{x}+y+3z&=b\ /\cdot(-2)\ /\cdot(-1)\\ 2x+y+z&=a\\ x+y+2z&=c\end{aligned}$$

---

$-y-5z=a-2b$ $\Rightarrow$ $y=-5z-a+2b$

$-z=c-b$ $\Rightarrow$ $\boxed{z=b-c}$

$=-5(b-c)-a+2b$

$\boxed{y=-3b-a+5c}$

$x=b-y-3z=b-(-3b-a+5c)-3(b-c)$

$\boxed{x=b+a-2c}$

$$L^{-1}(a,b,c)=(a+b-2c,\ -a-3b+5c,\ b-c)$$

$$L^{-1}(e_1)=L^{-1}(1,0,0)=(1,-1,0)=e_1-e_2+0\cdot e_3$$
$$L^{-1}(e_2)=L^{-1}(0,1,0)=(1,-3,1)=e_1-3e_2+e_3$$
$$L^{-1}(e_3)=L^{-1}(0,0,1)=(-2,5,-1)=-2e_1+5e_2-e_3$$

$$\boxed{[L^{-1}]_e=\begin{bmatrix}1&1&-2\\-1&-3&5\\0&1&-1\end{bmatrix}}$$

II НАЧИН (ЗА $[L^{-1}]_e$)

$$L(x,y,z)=(a,b,c)\ \Leftrightarrow\ [L]_e\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$[L]_e^{-1}$

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=[L]_e^{-1}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\ \Leftrightarrow\ (x,y,z)=L^{-1}(a,b,c)$$

$$[L]_e^{-1}\ \text{|||}\ [L^{-1}]_e$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\1&1&3&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&0&1&0\\2&1&1&1&0&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right]/\cdot(-2)\ /\cdot(-1)\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&3&0&1&0\\0&-1&-5&1&-2&0\\0&0&-1&0&-1&1\end{array}\right]/\cdot(-5)\ /\cdot 3\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&-2&3\\0&-1&0&1&3&-5\\0&0&-1&0&-1&1\end{array}\right]/\cdot(-1)\ /\cdot(-1)\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&-2\\0&1&0&-1&-3&5\\0&0&1&0&1&-1\end{array}\right]$$

# ДЕТЕРМИНАНТЕ

**Реда 1 и 2:**

$\det A = |a_{11}| = a_{11}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

ПРИМЕР $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 15 - 8 = 7$

**Реда 3:**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

САРУСОВО ПРАВИЛО

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

(1.) Наћи вредности параметра $k$ за које је

$$\det \begin{bmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{bmatrix} = 0$$

$2k^2 - 4k = 0$

$\Leftrightarrow k(k-2) = 0$

$\Leftrightarrow k = 0 \lor k = 2$

**Деф.** Детерминанта матрице $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ је

$$\det A = |A| = \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)}$$

где се сумирање врши по свим пермутацијама скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$.

(2) Израчунати вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{matrix} = 1 \cdot 4 \cdot (-2) + (-2)(-1) \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 5$$

$$- 3 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 5 - (-2) \cdot 2 \cdot (-2) = -8 + 2 + 30 - 12 + 5 - 8 = 9$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$|M_{ij}|$ – МИНОР – настаје прецртавањем $i$-те врсте и $j$-те колоне

$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ КОФАКТОР елемента $a_{ij}$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

ПРИМЕР $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 5 = 3$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4+1) = 3$ $\quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$

$A_{21} = \ldots$ $\quad A_{22} = \ldots$ $\quad A_{23} = \ldots$

$A_{31} = \ldots$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-9) = 10$ $\quad A_{33} = \ldots$

(Т) $A$ – квадратна матрица реда $n$. Тада важи ЛАПЛАСОВА ф-ла:

(1) РАЗВОЈ ПО $i$-ТОЈ ВРСТИ:

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in}$$

(2) РАЗВОЈ ПО $j$-ТОЈ КОЛОНИ:

$$\det A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj}$$

ЛАПЛАСОВ РАЗВОЈ ПО 1. ВРСТИ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -8 + 5 + 2(-4+1) + 3(10-4) =$$

$$= -3 - 6 + 18 = \underline{9}$$

# СВОЈСТВА ДЕТЕРМИНАНТИ

(T) Ако је матрица $B$ добијена од матрице $A$

1° заменом места 2 врсте (колоне) матрице $A$

$$\det B = -\det A$$

2° множењем врсте (колоне) матрице $A$ скаларом $k$

$$\det B = k \cdot \det A$$

3° тако што $j$-ту врсту (колону) матрице $A$ множимо са $k$ и додајемо $i$-тој врсти (колони)

$$\det B = \det A$$

- $\det A^T = \det A$
- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$
- ако $A$ има нула врсту (колону) $\det A = 0$
- ако су две врсте (колоне) исте $\det A = 0$
- ако је $A = \begin{bmatrix} \diagdown & \\ 0 & \diagdown \end{bmatrix}$ - ГОРЊЕ-ТРОУГАОНА $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ - производ елемената са дијагонале.

$\underline{\det I = 1}$

1. Ако је $A$ ортогонална $(A^T \cdot A = I)$ показати да је $\det A = \pm 1$

$$\left.\begin{aligned} \det A^T A &= \det A^T \cdot \det A = \det A \cdot \det A = (\det A)^2 \\ \det A^T A &= \det I = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\det A)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det A = \pm 1$$

2. Израчунати:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ \boxed{1} & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} /\cdot 2 \\ /\cdot(-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \boxed{-1} & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} /\cdot 3 \\ /\cdot(-3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -19 \\ 0 & -1 & 23 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -19 \\ -1 & 23 \end{vmatrix} =$$

$$= -(23 - 19) = -4$$

(Д3.)

3. Израчунати:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{III}+2\text{I}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & -2 \\ 4 & -3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ \boxed{-1} & 7 & -2 \\ -3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxed{-1} & 7 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 8 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} /\cdot 2 \\ /\cdot(-3) \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 7 & -2 \\ 0 & 18 & -1 \\ 0 & -13 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 18 & \boxed{-1} \\ -13 & 8 \end{vmatrix} /\cdot 8 = -(18 \cdot 8 - 13) = -(144 - 13) = -131$$