1. Нека је $U \leq \mathbb{R}^5$ генерисан векторима $e_1=(1,3,-3,-1,-4)$, $e_2=(1,4,-1,-2,-2)$ и $e_3=(2,9,0,-5,-2)$, а $W \leq \mathbb{R}^5$ генерисан са $f_1=(1,6,2,-2,3)$, $f_2=(2,8,-1,-6,-5)$ и $f_3=(1,3,-1,-5,-6)$. Наћи:

а) $\dim(U+W)$

б) $\dim(U\cap W)$

$U=\mathcal{L}(e_1,e_2,e_3)$, $W=\mathcal{L}(f_1,f_2,f_3)$

$U+W=\mathcal{L}(e_1,e_2,e_3)+\mathcal{L}(f_1,f_2,f_3)\overset{\text{пл.}}{=}\mathcal{L}(e_1,e_2,e_3,f_1,f_2,f_3)$

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&3&-3&-1&-4\\1&4&-1&-2&-2\\2&9&0&-5&-2\\1&6&2&-2&3\\2&8&-1&-6&-5\\1&3&-1&-5&-6\end{bmatrix}/\cdot(-1),\ /\cdot(-2)\sim\begin{bmatrix}1&3&-3&-1&-4\\0&\boxed{1}&2&-1&2\\0&3&6&-3&6\\0&3&5&-1&7\\0&2&5&-4&3\\0&0&2&-4&-2\end{bmatrix}/\cdot(-3),\ /\cdot(-2)\sim\begin{bmatrix}1&3&-3&-1&-4\\0&1&2&-1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&\boxed{-1}&2&1\\0&0&1&-2&-1\\0&0&2&-4&-2\end{bmatrix}/\cdot 2\sim\begin{bmatrix}1&3&-3&-1&-4\\0&1&2&-1&2\\0&0&0&0&0\\0&0&-1&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \dim(U+W)=3$

б) $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$ – Грасманова ф-ла

$\dim U$: $U=\mathcal{L}(e_1,e_2,e_3)$

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&3&-3&-1&-4\\1&4&-1&-2&-2\\2&9&0&-5&-2\end{bmatrix}/\cdot(-1),\ /\cdot(-2)\sim\begin{bmatrix}1&3&-3&-1&-4\\0&\boxed{1}&2&-1&2\\0&3&6&-3&6\end{bmatrix}/\cdot(-3)\sim\begin{bmatrix}\boxed{1}&3&-3&-1&-4\\0&\boxed{1}&2&-1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow \dim U=2$$

$\dim W$: $W=\mathcal{L}(f_1,f_2,f_3)$

$$\begin{bmatrix}\boxed{1}&6&2&-2&3\\2&8&-1&-6&-5\\1&3&-1&-5&-6\end{bmatrix}/\cdot(-2),\ /\cdot(-1)\sim\begin{bmatrix}1&6&2&-2&3\\0&-4&-5&-2&-11\\0&-3&-3&-3&-9\end{bmatrix}/\cdot\left(-\tfrac{3}{4}\right)\sim\begin{bmatrix}1&6&2&-2&3\\0&-4&-5&-2&-11\\0&0&\tfrac{3}{4}&-\tfrac{3}{2}&-\tfrac{3}{4}\end{bmatrix}\Rightarrow \dim W=3$$

$3=2+3-\dim(U\cap W)\Rightarrow \boxed{\dim(U\cap W)=2}$

6. $U=\mathcal{L}(u_1,u_2,u_3)$ $\quad u_1=(1,1,0,-1)$ $\quad v_1=(1,2,2,-2)$

$V=\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)$ $\quad u_2=(1,2,3,0)$ $\quad v_2=(2,3,2,-3)$

$u_3=(2,3,3,-1)$ $\quad v_3=(1,3,4,-3)$

Одредити бар једну базу за $U, V, U+W, U\cap W$.

за U:

$$\begin{array}{c}u_1\\u_2\\u_3\end{array}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\1&2&3&0\\2&3&3&-1\end{bmatrix}/\cdot(-1),\ /\cdot(-2)\sim\begin{array}{c}u_1\\u_2-u_1\\u_3-2u_1\end{array}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&\boxed{1}&3&1\\0&1&3&1\end{bmatrix}/\cdot(-1)\sim\begin{array}{c}u_1\\u_2-u_1\\ \\\end{array}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$u_3-2u_1-u_2+u_1=0$

$u_3-u_2-u_1=0\Rightarrow u_3=u_1+u_2$

$\dim U=2$

база за U $[u_1,u_2]$

друга база за U - врсте степенасте матрице које нису нула, тј. $(1,1,0,-1)$ и $(0,1,3,1)$

за V:

$$\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\end{array}\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&2&-2\\2&3&2&-3\\1&3&4&-3\end{bmatrix}/\cdot(-2),\ /\cdot(-1)\sim\begin{array}{c}v_1\\v_2-2v_1\\v_3-v_1\end{array}\begin{bmatrix}1&2&2&-2\\0&\boxed{-1}&-2&1\\0&1&2&-1\end{bmatrix}\sim\begin{array}{c}v_1\\v_2-2v_1\\ \\\end{array}\begin{bmatrix}1&2&2&-2\\0&-1&-2&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$v_3-v_1+v_2-2v_1=0$

$v_3+v_2-3v_1=0\Rightarrow v_3=-v_2+3v_1$

$\dim V=2$

база за V $[v_1,v_2]$

друга база $(1,2,2,-2)$, $(0,-1,-2,1)$

за $U+V$: $U+V=\mathcal{L}(u_1,u_2,u_3)+\mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)=\mathcal{L}(u_1,u_2)+\mathcal{L}(v_1,v_2)=\mathcal{L}(u_1,u_2,v_1,v_2)$

$$\begin{array}{c}u_1\\u_2\\v_1\\v_2\end{array}\begin{bmatrix}\boxed{1}&1&0&-1\\1&2&3&0\\1&2&2&-2\\2&3&2&-3\end{bmatrix}/\cdot(-1),\ /\cdot(-2)\sim\begin{array}{c}u_1\\u_2-u_1\\v_1-u_1\\v_2-2u_1\end{array}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&\boxed{1}&3&1\\0&1&2&-1\\0&1&2&-1\end{bmatrix}/\cdot(-1)\sim\begin{array}{c}u_1\\u_2-u_1\\v_1-u_1-(u_2-u_1)\\v_2-2u_1-(u_2-u_1)\end{array}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&1&3&1\\0&0&\boxed{-1}&-2\\0&0&-1&-2\end{bmatrix}/\cdot(-1)\sim$$

$$\sim\begin{array}{c}u_1\\u_2-u_1\\v_1-u_2\\v_2-u_2-u_1-(v_1-u_2)\end{array}\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&1&3&1\\0&0&-1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\dim(U+V)=3$

база $=[v_1,u_2,v_3]$

$v_2 - v_1 - u_1 = 0 \Rightarrow \boxed{v_2 = v_1 + u_1}$

за $U \cap V$: $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U\cap V)$

$3 = 2 + 2 - \dim(U \cap V)$

$\dim(U\cap V) = 1$

$v \in U \cap V \Rightarrow v \in U \ \wedge\ v \in V$

$v \in \mathcal{L}(u_1,u_2) \ \wedge\ v \in \mathcal{L}(v_1,v_2)$

$v = \alpha u_1 + \beta u_2 \ \wedge\ v = \gamma v_1 + \delta v_2$

$\alpha(1,1,0,-1) + \beta(1,2,3,0) = \gamma(1,2,2,-2) + \delta(2,3,2,-3)$

$(\alpha+\beta, \alpha+2\beta, 3\beta, -\alpha) = (\gamma+2\delta, 2\gamma+3\delta, 2\gamma+2\delta, -2\gamma-3\delta)$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= \gamma+2\delta \\ \alpha+2\beta &= 2\gamma+3\delta \\ 3\beta &= 2\gamma+2\delta \\ -\alpha &= -2\gamma-3\delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\alpha}+\beta-\gamma-2\delta &= 0 \quad /\cdot(-1) \\ \alpha+2\beta-2\gamma-3\delta &= 0 \\ 3\beta-2\gamma-2\delta &= 0 \\ -\alpha+2\gamma+3\delta &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\beta}-\gamma-\delta &= 0 \quad /\cdot(-3) \quad /\cdot(-1) \\ 3\beta-2\gamma-2\delta &= 0 \\ \beta+\gamma+\delta &= 0 \end{aligned}$$

$\gamma + \delta = 0$

$2\gamma + 2\delta = 0 \ /:2 \Rightarrow \gamma+\delta = 0$

$\Rightarrow \boxed{\gamma = -\delta}\quad \boxed{\delta = a}\quad \boxed{\gamma = -a}$

$\beta = \gamma + \delta \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

$\alpha = -\beta + \gamma + 2\delta \Rightarrow \boxed{\alpha = \delta}\quad \boxed{\alpha = a}$

$v = \alpha u_1 + \beta u_2$

$= a u_1 + 0 \cdot u_2$

$= a(1,1,0,-1)$

$\underbrace{\boxed{v = a(1,1,0,-1),\ a \in \mathbb{R}}}_{\text{база}}$

4. Нека је $U = \mathcal{L}(u_1,u_2,u_3)$ и $V = \mathcal{L}(v_1,v_2,v_3)$, где је

$u_1 = (1,2,0,-1)$ $\quad v_1 = (1,1,1,1)$

$u_2 = (0,3,1,2)$ $\quad v_2 = (0,1,1,2)$

$u_3 = (-1,1,1,3)$ $\quad v_3 = (-1,0,0,1)$

Одредити бар једну базу за $U, V, U+V, U\cap V$.

за U:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} /\cdot(-1) \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_1' \\ \leftarrow u_2' \\ \ \end{matrix} \end{array}$$

$\dim U = 2$ база $[(1,2,0,-1),(0,3,1,2)]$

друго база $[u_1, u_2]$

за V:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} /\cdot(-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow v_1' \\ \leftarrow v_2' \\ \ \end{matrix}$$

$\dim V = 2$ једна база $[v_1', v_2']$

друго база $[v_1, v_2]$

за $U+V$: $\mathcal{L}(X) + \mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(X \cup Y)$

$U + V = \mathcal{L}(u_1,u_2,u_3) + \mathcal{L}(v_1,v_2,v_3) = \mathcal{L}(\underline{u_1},\underline{u_2},u_3,\underline{v_1},\underline{v_2},v_3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} /\cdot(-1) \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} /\cdot(-1)\ /\cdot\tfrac{1}{3}\ /\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right)\ /\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\tfrac{4}{3}} & \tfrac{8}{3} \\ 0 & 0 & \tfrac{2}{3} & \tfrac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{4}{3} \end{bmatrix} /\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\ /\cdot\tfrac{1}{2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tfrac{4}{3} & \tfrac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Big\} \text{база}$$

$\dim(U+V) = 3$

базу чине u_1, u_2, v_1

за $U \cap V$: На основу Грасманове ф-ле:

$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U\cap V)$

$3 = 2 + 2 - \dim(U \cap V)$

$\Rightarrow \dim(U\cap V) = 1$

$v \in U \cap W = \mathcal{L}(u_1,u_2) \wedge \mathcal{L}(v_1,v_2)$

$v = \alpha u_1 + \beta u_2$

$v = \gamma v_1 + \delta v_2$

$\alpha u_1 + \beta u_2 = \gamma v_1 + \delta v_2$

$\alpha(1,2,0,-1) + \beta(0,3,1,2) = \gamma(1,1,1,1) + \delta(0,1,1,2)$

$(\alpha, 2\alpha+3\beta, \beta, -\alpha+2\beta) = (\gamma, \gamma+\delta, \gamma+\delta, \gamma+2\delta)$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = \gamma \\ 2\alpha+3\beta = \gamma+\delta \\ \beta = \gamma+\delta \\ -\alpha+2\beta = \gamma+2\delta \end{array}\right\} \overset{\alpha=\gamma}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} 3\beta+\gamma-\delta=0 \\ \beta-\gamma-\delta=0 \\ \underline{2\beta-2\gamma-2\delta=0 \,/:2} \to \beta-\cancel{\gamma}-\delta=0 \\ 4\beta-2\delta=0 \end{array}$$

$\boxed{\delta=a}$ $\boxed{\beta=\frac{1}{2}a}$

$\gamma=\beta-\delta=\frac{1}{2}a-a=-\frac{1}{2}a$ $\boxed{\gamma=-\frac{a}{2}}$ $\boxed{\alpha=-\frac{a}{2}}$

$$v=-\frac{a}{2}u_1+\frac{a}{2}u_2=-\frac{a}{2}(1,2,0,-1)+\frac{a}{2}(0,3,1,2)$$

$$=\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{3a}{2}\right)=a\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$U\cap V=\left\{v \mid v=a\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}=\left\{a\underbrace{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}_{\text{база}} \mid a\in\mathbb{R}\right\}$$

II начин

за $U+V$ и $U\cap V$: $U=\mathcal{L}(u_1,u_2)$, $V=\mathcal{L}(v_1,v_2)$ $\quad U+V=\mathcal{L}(u_1,u_2)+\mathcal{L}(v_1,v_2)=\mathcal{L}(u_1,u_2,v_1,v_2)$

$$\begin{array}{c} u_1\\u_2\\v_1\\v_2\end{array}\begin{bmatrix}\boxed{1}&2&0&-1\\0&3&1&2\\1&1&1&1\\0&1&1&2\end{bmatrix}/\cdot(-1) \sim \begin{array}{c} u_1\\u_2\\v_1-u_1\\v_2\end{array}\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&\boxed{3}&1&2\\0&-1&1&2\\0&1&1&2\end{bmatrix}/\cdot\frac{1}{3}\ /\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \sim \begin{array}{c} u_1\\u_2\\v_1-u_1+\frac{1}{3}u_2\\v_2-\frac{1}{3}u_2\end{array}\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&3&1&2\\0&0&\boxed{\frac{4}{3}}&\frac{8}{3}\\0&0&\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\end{bmatrix}/\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \sim \begin{bmatrix}\boxed{1}&2&0&-1\\0&\boxed{3}&1&2\\0&0&\boxed{\frac{4}{3}}&\frac{8}{3}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{array}{c} u_1\\u_2\\v_1-u_1+\frac{1}{3}u_2\\ \end{array}$$

$$v_2-\frac{1}{3}u_2-\frac{1}{2}\left(v_1-u_1+\frac{1}{3}u_2\right)=0$$

$$-\frac{1}{2}v_1+v_2-\frac{1}{2}u_2+\frac{1}{2}u_1=0$$

$\dim(U+V)=3 \Rightarrow$ база је u_1,u_2,v_1

Грасман $\Rightarrow$ $3=2+2-\dim(U\cap V)$
$\Rightarrow \underline{\dim(U\cap V)=1}$ (*)

$$x=\underbrace{-\frac{1}{2}v_1+v_2}_{\in\mathcal{L}(v_1,v_2)}=\underbrace{-\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2}_{\in\mathcal{L}(u_1,u_2)}$$

$x=-\frac{1}{2}(1,1,1,1)+(0,1,1,2)$
$=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow x\in\mathcal{L}(v_1,v_2)\cap\mathcal{L}(u_1,u_2)$
$\Rightarrow x\in U\cap V$ (*) $\Big|\Rightarrow U\cap V=\mathcal{L}\left(\underline{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)}\right)$

3) Нека је $V=M_n(\mathbb{K})$.

а) Показати да је $V=U\oplus W$ где је U потпростор симетричних матрица ($A=A^T$), а W потпростор антисиметричних матрица ($A^T=-A$)

б) Показати да је $V\neq U\oplus W$, где је U потпростор горње троугаоних, а W потпростор доње троугаоних матрица.

а) 1) Произвољна квадратна матрица A се може представити као:

$$A=\underbrace{\frac{1}{2}(A+A^T)}_{\in U}+\underbrace{\frac{1}{2}(A-A^T)}_{\in W}$$

$\underline{\left(\frac{1}{2}(A+A^T)\right)^T}=\frac{1}{2}(A+A^T)^T=\frac{1}{2}(A^T+(A^T)^T)=\frac{1}{2}(A^T+A)=\underline{\frac{1}{2}(A+A^T)} \Rightarrow \frac{1}{2}(A+A^T)$ – симетрична

$\underline{\left(\frac{1}{2}(A-A^T)\right)^T}=\frac{1}{2}(A-A^T)^T=\frac{1}{2}(A^T-(A^T)^T)=\frac{1}{2}(A^T-A)=\underline{-\frac{1}{2}(A-A^T)} \Rightarrow \frac{1}{2}(A-A^T)$ – антисиметрична

Дакле, $V=U+W$

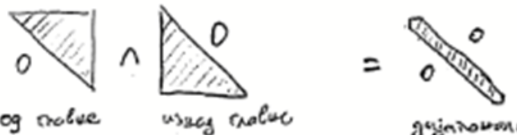
2) $U\cap W=\{0\}$?

(пп.) $A\in U\cap W$

$\Rightarrow A\in U \ \wedge \ A\in W$
$A=A^T \ \wedge \ A^T=-A \quad \Rightarrow A=-A \Rightarrow 2A=0 \Rightarrow \underline{A=0}$ ✓

Дакле, $V=U\oplus W$.

б) $U\cap W\neq\{0\}$



испод главне дијагонале нуле
$a_{ij}=0,\ i>j$

изнад главне дијагонале нуле
$a_{ij}=0,\ i<j$

дијагоналне матрице

ЛИНЕАРНА ПРЕСЛИКАВАЊА

Definicija Neka je U vektorski prostor u odnosu na sabiranje $+_U$ i V vektorski prostor u odnosu na $+_V$ vektorski prostori nad poljem F. Preslikavanje $F : U \longrightarrow V$ je linearno preslikavanje, (linearni operator, linearna transformacija ili homomorfizam vektorskih prostora) ako važi:

(1) $F(\mathbf{u}_1 +_U \mathbf{u}_2) = F(\mathbf{u}_1) +_V F(\mathbf{u}_2)$ za sve $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$; i

(2) $F(k\,\mathbf{u}) = k\,F(\mathbf{u})$ za sve $\mathbf{u} \in U$ i $k \in F$.

- **Ako je $F : U \longrightarrow V$ linearni operator onda:**

(a) $F(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$;

(b) **Za sve $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ i $a_1, a_2 \in F$:**

$$F(a_1\,\mathbf{u}_1 + a_2\,\mathbf{u}_2) = a_1\,F(\mathbf{u}_1) + a_2\,F(\mathbf{u}_2)$$

(1) Neka je $F : R^3 \longrightarrow R^3$ 'projekcija na ravan Oxy': $F(x, y, z) = (x, y, 0)$. F je linearno preslikavanje.

$v = (a, b, c)$
$w = (a', b', c')$.

$$F(v + w) = F(a + a',\ b + b',\ c + c') = (a + a',\ b + b',\ 0)$$
$$= (a, b, 0) + (a', b', 0) = F(v) + F(w)$$

$$F(kv) = F((ka, kb, kc) = (ka, kb, 0) = k(a, b, 0) = kF(v)$$

(2) Neka je $F : R^2 \longrightarrow R^2$ translacija za vektor $(1, 2)$: $F(x, y) = (x + 1, y + 2)$. F nije linearno preslikavanje.

$$F(0) = F(0, 0) = (1, 2) \neq 0$$

1. Нека је V векторски простор квадратних матрица реда $n\times n$ над пољем $\mathbb{K}$, и нека је M фиксирана ненула матрица. Дата су три пресликавања:

$T_1: V\to V$ $\quad$ $T_2: V\to V$ $\quad$ $T_3: V\to V$

$T_1(A)=MA$ $\quad$ $T_2(A)=MA-AM$ $\quad$ $T_3(A)=M+A$

Показати да су пресликавања T_1 и T_2 линеарна, а да T_3 није линеарно.

1° АДИТИВНОСТ

$\underline{T_1(A+B)}=M(A+B)=MA+MB=\underline{T_1(A)+T_1(B)}$ ✓✓

2° ХОМОГЕНОСТ

$\underline{T_1(kA)}=M(kA)=kMA=\underline{k\cdot T_1(A)}$ ✓✓

1° $\underline{T_2(A+B)}=M(A+B)-(A+B)M=\underline{MA}+MB-\underline{AM}-BM=MA-AM+MB-BM=\underline{T_2(A)+T_2(B)}$ ✓✓

2° $\underline{T_2(kA)}=M(kA)-(kA)M=kMA-kAM=k(MA-AM)=\underline{k\,T_2(A)}$ ✓✓

1° $T_3(A+B)=M+A+B=T_3(A)+B$???

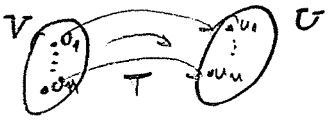
(П.п.с.) T_3 - линеарно

$T_3(\underbrace{O_M}_{\text{матрица}})=T_3(\underbrace{0}_{\text{број}}\cdot A)\underset{\text{хомогеност}}{=}0\cdot T_3(A)=\underline{0}$

$T_3(O_M)=M+O_M=\underline{M}$ $\quad$ ↯ јер $M\neq 0$ $\quad\Rightarrow$ T није линеарно!!!

(T1) U,V - векторски простори над истим пољем $\mathbb{K}$. $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ - база за V
$(u_1,u_2,\dots,u_n)$ - произвољни вектори из U

Тада $\exists!$ линеарно пресликавање $T: V\to U$ тако да је $T(v_1)=u_1$
$T(v_2)=u_2$
$\dots$
$T(v_n)=u_n$



2. Нека је $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање и нека $T(1,2)=(3,-1,5)$
$T(0,1)=(2,1,-1)$.

Наћи ф-ју за T, тј. наћи $T(a,b)$.

$(1,2)$ и $(0,1)$ чине базу за $\mathbb{R}^2$ јер су линеарно независни, а $\dim\mathbb{R}^2=2$

$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ линеарно пресликавање T постоји и јединствено је на основу (T1)

$e_1=(1,2)$ и $e_2=(0,1)$ су база за $\mathbb{R}^2\Rightarrow(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2)(\exists!\,x,y)\ (a,b)=x e_1+y e_2$

$T(a,b)=T(x\cdot e_1+y\cdot e_2)=x\,T(e_1)+y\,T(e_2)=x(3,-1,5)+y(2,1,-1)$

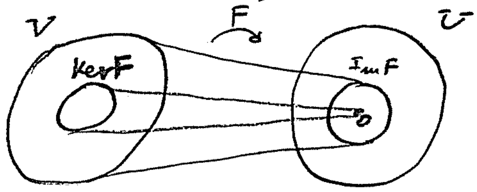
$(a,b)=x(1,2)+y(0,1)=(x,2x+y)$

$a=x$
$b=2x+y$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{\begin{matrix}x=a\\ y=b-2a\end{matrix}}$

$\Rightarrow \underline{T(a,b)}=a(3,-1,5)+(b-2a)(2,1,-1)=(3a,-a,5a)+(2b-4a,b-2a,2a-b)$

$=\underline{(2b-a,\ b-3a,\ 7a-b)}$

ЈЕЗГРО И СЛИКА ЛИНЕАРНОГ ПРЕСЛИКАВАЊА



$F: V \to U$ – линеарно пресликавање

$\mathrm{Im}\,F = \{u \in U \mid F(v) = u$ за неко $v \in V\}$ <u>СЛИКА</u>

$\ker F = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$ <u>ЈЕЗГРО</u>

$\mathrm{Im}\,F \leq U \qquad \ker F \leq V$

(T1) $\dim V = \dim(\mathrm{Im}\,F) + \dim(\ker F)$

$= \underset{\text{РАНГ}}{\rho(F)} + \underset{\text{ДЕФЕКТ}}{\delta(F)}$

(T2) $F: V \to U$ – линеарно пресликавање

$V = \mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_n) \Rightarrow \mathrm{Im}\,F = \mathcal{L}(F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_n))$

(1.) Нека је $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ дато са $G(x,y,z) = (x+y, y+z)$

а) показати да је G линеарно пресликавање

б) наћи базу и dim за $\mathrm{Im}\,G$

в) наћи базу и dim за $\ker G$

а) $v_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ произвољни $\quad G(v_1+v_2) \overset{?}{=} G(v_1) + G(v_2)$ <u>АДИТИВНОСТ</u>

$G(v_1+v_2) = G((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = G(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = ((x_1+x_2)+(y_1+y_2), (y_1+y_2)+(z_1+z_2))$

$= (x_1+x_2+y_1+y_2, y_1+y_2+z_1+z_2) =$

$G(v_1) + G(v_2) = G(x_1,y_1,z_1) + G(x_2,y_2,z_2) = (x_1+y_1, y_1+z_1) + (x_2+y_2, y_2+z_2) =$ ✓

$= (x_1+y_1+x_2+y_2, y_1+z_1+y_2+z_2) =$

$G(kv) \overset{?}{=} k \cdot G(v)$ <u>ХОМОГЕНОСТ</u>

$G(kv) = G(kx, ky, kz) = (kx+ky, ky+kz) = k(x+y, y+z) = k\,G(x,y,z)$

б) Слике базних вектора $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ и $e_3 = (0,0,1)$ су генератриса за $\mathrm{Im}\,G$

$G(e_1) = G(1,0,0) = (1+0, 0+0) = (1,0) = f_1$

$G(e_2) = G(0,1,0) = (1,1) = f_2$ ← ови вектори су генератриса за $\mathrm{Im}\,G$

$G(e_3) = G(0,0,1) = (0,1) = f_3$

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \end{array}$$

су база за $\mathrm{Im}\,G$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Im}\,G = \rho(G) = 2$

в) $\ker G = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid G(v) = 0_v\} = \{(x,y,z) \mid G(x,y,z) = 0\} = \{(a,-a,a) \mid a \in \mathbb{R}\} =$

$G(x,y,z) = (x+y, y+z) = (0,0)$

$\boxed{x} + y = 0$

$\boxed{y} + z = 0$

слободна

$\boxed{z = a,\ a \in \mathbb{R}}$

$y = -z \Rightarrow \boxed{y = -a}$

$x = -y \Rightarrow \boxed{x = a}$

$= \{a(1,-1,1) \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}(\underbrace{(1,-1,1)}_{\text{база}})$

$\Rightarrow \dim \ker G = \delta(G) = 1$

2. Матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in M_{3\times4}(\mathbb{R})$ дефинише пресликавање $F: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ са $F(v) = \underset{3\times4}{A} \cdot \underset{4\times1}{v}$ $\;(3\times1)$

Нађи базу и димензију за $\operatorname{Im} F$ и $\operatorname{Ker} F$.

$\operatorname{Im} F$: слике базних:

$$F(e_1) = A\cdot e_1 = \underset{3\times4}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}} \underset{4\times1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} = A_{\downarrow 1}$$

$$F(e_2) = A\cdot e_2 = A_{\downarrow 2}$$

$$F(e_3) = A\cdot e_3 = A_{\downarrow 3}$$

$$F(e_4) = A\cdot e_4 = A_{\downarrow 4}$$

$\operatorname{Im} F = \mathcal{L}(F(e_1), F(e_2), F(e_3), F(e_4))$ ← простор генерисан колонама матрице A

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-2) \\ \\ \\ /\cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} /\cdot\tfrac{2}{5} \;\; /\cdot\tfrac{-3}{5} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{база} \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} F = 2 \Rightarrow \rho(F) = 2$

база слике од F ($\operatorname{Im} F$) је $(1,2,1),\ (0,-5,-5)$

или $(1,2,1),\ (2,-1,-3)$

$\operatorname{Ker} F$: $v \in \operatorname{Ker} F \Leftrightarrow F(v) = 0$

$\Leftrightarrow Av = 0 \qquad v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} \boxed{x} + 2y + t &= 0 \quad /\cdot(-2) \quad /\cdot(-1) \\ 2x - y + 2z - t &= 0 \\ x - 3y + 2z - 2t &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + t &= 0 \\ \boxed{-5y} + 2z - 3t &= 0 \\ -5y + \cancel{2z - 3t} &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = \frac{2}{5}z - \frac{3}{5}t$

$x = -2y - t = -\frac{4}{5}z + \frac{6}{5}t - t$

$= -\frac{4}{5}z + \frac{1}{5}t$

$$\operatorname{Ker} F = \left\{ \left(-\tfrac{4}{5}z + \tfrac{1}{5}t,\ \tfrac{2}{5}z - \tfrac{3}{5}t,\ z,\ t\right) \,\middle|\, z,t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ z\left(-\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}, 1, 0\right) + t\left(\tfrac{1}{5}, -\tfrac{3}{5}, 0, 1\right) \,\middle|\, z,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathcal{L}\Big(\underbrace{\left(-\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}, 1, 0\right)}_{f_1}, \underbrace{\left(\tfrac{1}{5}, -\tfrac{3}{5}, 0, 1\right)}_{f_2}\Big) \rightarrow f_1, f_2 \text{ – генератриса за } \operatorname{Ker} F \text{ од } 2 = \dim \operatorname{Ker} F \text{ вектора}$$

$\rho(F) = 2$

$\rho(F) + \delta(F) = \dim \mathbb{R}^4 = 4$ $\;\Rightarrow \delta(F) = 2 = \dim \operatorname{Ker} F$

$\overset{(T)}{\Rightarrow} f_1, f_2$ – база за $\operatorname{Ker} F$

ОПЕРАЦИЈЕ СА ЛИНЕАРНИМ ПРЕСЛИКАВАЊИМА

Neka su $F : U \longrightarrow V$ i $G : U \longrightarrow V$ linearni operatori. Definišemo sabiranje operatora i množenje operatora skalarom:

(1) $F{+}G : U \longrightarrow V$

$$(F{+}G)(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) + G(\mathbf{u})$$

(2) $(kF) : U \longrightarrow V$

$$(kF)(\mathbf{u}) = kF(\mathbf{u})$$

- $F{+}G$ i $k\mathbf{F}$ su linearni operatori.

Neka su U, V, W vektorski prostori nad istim poljem skalara i $F : U \longrightarrow V$, $G : V \longrightarrow W$ linearni operatori. Kompozicija (ili slaganje) linearnih operatora $G \circ F : U \longrightarrow W$ je definisana sa:

$$(G \circ F)(\mathbf{u}) = G(F(\mathbf{u}))$$

① Нека су $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$F(x,y,z) = (y, x+z)$ $\quad G(x,y,z) = (2z, x-y)$ $\quad H(x,y) = (y, 2x)$

Нађи ф-ле за $F+G$, $3F-2G$, $H\circ F$, $H \circ G$, $F\circ H$, $G \circ H$.

- $(F+G)(x,y,z) = F(x,y,z) + G(x,y,z) = (y, x+z) + (2z, x-y) = (y+2z, 2x-y+z)$
- $(3F-2G)(x,y,z) = (3F)(x,y,z) - (2G)(x,y,z) = 3\cdot F(x,y,z) - 2\cdot G(x,y,z) = 3(y, x+z) - 2(2z, x-y)$
  $= (3y-4z, 3x+3z-2x+2y) = (3y-4z, x+2y+3z)$
- $H\circ F$: $\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "H\circ F"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "H"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$ $\implies H\circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(H\circ F)(x,y,z) = H(F(x,y,z)) = H(y, x+z) = (x+z, 2y)$

- $H\circ G : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{G} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{H} \mathbb{R}^2 \implies H\circ G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(H\circ G)(x,y,z) = H(G(x,y,z)) = H(2z, x-y) = (x-y, 4z)$

- $F\circ H : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{H} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} ???$ $\quad$ композиција није дефинисана
- $G\circ H : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{H} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{G} ???$ $\quad$ —— " ——

② Показати да су следећа пресликавања линеарно независна:

$F, G, H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ - линеарна пресликавања

$F(x,y,z) = x+y+z$

$G(x,y,z) = y+z$

$H(x,y,z) = x-z$

$\alpha F + \beta G + \gamma H = 0 \leftarrow$ нула ф-ја $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (довољно је да се поклапају на бази)

$e_1 = (1,0,0)$ $\quad e_2 = (0,1,0)$ $\quad e_3 = (0,0,1)$ канонска база

$(\alpha F + \beta G + \gamma H)(e_1) = O(e_1) = 0$

$\alpha F(e_1) + \beta G(e_1) + \gamma H(e_1) = 0$ $\qquad \alpha F(e_2) + \beta G(e_2) + \gamma H(e_2) = 0$ $\qquad \alpha F(e_3) + \beta G(e_3) + \gamma H(e_3) = 0$

$\alpha\cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 1 = 0$ $\qquad \alpha \cdot 1 + \beta\cdot 1 + \gamma \cdot 0 = 0$ $\qquad \alpha\cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma\cdot(-1) = 0$

$$\begin{aligned} \boxed{\alpha} + \gamma &= 0 \quad /\cdot(-1) \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + \beta - \gamma &= 0 \\ \hline \boxed{\beta} - \gamma &= 0 \quad /\cdot(-1) \\ \beta - 2\gamma &= 0 \\ \hline \boxed{\gamma = 0} \implies \boxed{\beta = 0} &\implies \boxed{\alpha = 0} \end{aligned}$$

ИНВЕРЗАН ОПЕРАТОР

- Линеаран оператор $L: V \to V$ је инвертибилан ако $\exists L^{-1}: V \to V$ линеаран тд. је $L \circ L^{-1} = L^{-1} \circ L = I$

(Т) Нека је $L: V \to V$ линеаран оператор и V в. простор коначне dim. Следећи услови су еквивалентни:

(а) L инвертибилан

(б) L „1-1"

(в) L „НА"

(г) $\operatorname{Ker} L = \{0\}$ → језгро тривијално.

1. Нека је $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(x,y,z) = (x+y-2z,\ x+2y+z,\ 2x+2y-3z)$. Испитати да ли је L инвертибилан и ако јесте наћи ф-ју за L^{-1}.

$\operatorname{Ker} L = \{0\}$? језгро тривијално?

$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} L \iff L(x,y,z) = 0$

$$(x+y-2z,\ x+2y+z,\ 2x+2y-3z) = (0,0,0)$$

$$\begin{aligned} \boxed{x}+y-2z &= 0 \quad / \cdot(-1) \quad / \cdot(-2) \\ x+2y+z &= 0 \\ 2x+2y-3z &= 0 \\ \hline x+y-2z &= 0 \\ y+3z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow y=0 \quad \Rightarrow x=0$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} L = \{0\} \Rightarrow L$ је инвертибилан

L^{-1} \ $L(x,y,z) = (a,b,c)$

$L^{-1} \circ L(x,y,z) = L^{-1}(a,b,c)$

$I(x,y,z) = L^{-1}(a,b,c)$

$(x,y,z) = L^{-1}(a,b,c)$

$$\begin{aligned} \boxed{x}+y-2z &= a \quad / \cdot(-1) \quad / \cdot(-2) \\ x+2y+z &= b \\ 2x+2y-3z &= c \\ \hline y+3z &= b-a \\ \boxed{z = c-2a} \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = b-a-3z = b-a-3(c-2a) = \boxed{5a+b-3c}$

$x = a-y+2z = a-(5a+b-3c)+2(c-2a) = \boxed{-8a-b+5c}$

$\Rightarrow x = -8a-b-5c$

$y = 5a+b-3c$

$z = -2a+c$

$$\Rightarrow \boxed{L^{-1}(a,b,c) = (-8a-b-5c,\ 5a+b-3c,\ -2a+c)}$$

МАТРИЦЕ ЛИНЕАРНИХ ОПЕРАТОРА (ПРЕСЛИКАВАЊА)

Neka je $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza vektorskog prostora V. Tada se svaki vektor $\mathbf{u} \in V$ na jedinstven način predstavlja kao linearna kombinacija

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n$$

$a_1, a_2, ..., a_n$ **su koordinate vektora u u odnosu na bazu S a**

$$[\mathbf{u}]_S = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$$

je koordinatni vektor vektora u u odnosu na bazu S.

Neka je T linearni operator na vektorskom prostoru V (t.j. $T : V \longrightarrow V$), neka je $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza vektorskog prostora V i neka je:

$$T(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + ... + a_{1n}\mathbf{v}_n$$

$$T(\mathbf{v}_2) = a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + ... + a_{2n}\mathbf{v}_n$$

$$......................................$$

$$T(\mathbf{v}_n) = a_{n1}\mathbf{v}_1 + a_{n2}\mathbf{v}_2 + ... + a_{nn}\mathbf{v}_n$$

Matrična reprezentacija operatora T u odnosu na bazu S, ili matrica operatora T u odnosu na S, je transponovana matrica koeficijenata.

$$[T]_S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ . & . & ... & . \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- **Ove matrice zavise od baze; u odnosu na različite baze možemo dobiti različite matrice operatora.**

Algoritam za formiranje matrice operatora u odnosu na bazu

Neka je $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ baza prostora V i $T : V \longrightarrow V$ linearni operator. Matricu operatora T u odnosu na bazu S formiramo na sladeći način:

Korak 1 Za $i = 1, 2, ..., n$ izračunamo $T(v_i)$ u obliku:

$$T(\mathbf{v}_i) = a_{i1}\mathbf{v}_1 + a_{i2}\mathbf{v}_2 + ... + a_{in}\mathbf{v}_n$$

Korak 2 Formiramo matricu od vektora $T(\mathbf{v}_i)$ kao vektora kolona.

① Наћи матрицу линеарних оператора $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ у односу на канонску базу E простора $\mathbb{R}^3$, и у односу на базу $S=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(1,2,3),\ u_3=(1,3,5)\}$

а) $T(x,y,z)=(x,y,0)$

б) $T(x,y,z)=(2x-7y-4z,\ 3x+y+4z,\ 6x-8y+z)$

в) $T(x,y,z)=(z,\ y+z,\ x+y+z)$

• канонска база за $\mathbb{R}^3$ је $E=\{e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1)\}$

а)
$$T(e_1)=(1,0,0)=1\cdot e_1+0\cdot e_2+0\cdot e_3$$
$$T(e_2)=(0,1,0)=0\cdot e_1+1\cdot e_2+0\cdot e_3$$
$$T(e_3)=(0,0,0)=0\cdot e_1+0\cdot e_2+0\cdot e_3$$
$$\begin{array}{c} [T]_E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ [T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E & [T(e_3)]_E\end{array}\end{array}$$

б)
$$T(e_1)=(2,3,6)=2\cdot e_1+3\cdot e_2+6\cdot e_3$$
$$T(e_2)=(-7,1,-8)=-7e_1+e_2-8e_3$$
$$T(e_3)=(-4,4,1)=-4e_1+4e_2+e_3$$
$$[T]_E=\begin{bmatrix}2&-7&-4\\3&1&4\\6&-8&1\end{bmatrix}$$

в)
$$T(e_1)=(0,0,1)=e_3$$
$$T(e_2)=(0,1,1)=e_2+e_3$$
$$T(e_3)=(1,1,1)=e_1+e_2+e_3$$
$$[T]_E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

• у односу на базу $S=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(1,2,3),\ u_3=(1,3,5)\}$

$$T(a,b,c)=x\cdot u_1+y\cdot u_2+z\cdot u_3=x(1,1,0)+y(1,2,3)+z(1,3,5)$$

произвољан вектор

координате вектора у бази $[u_1,u_2,u_3]=S$

$$\begin{aligned}
\boxed{x}+y+z&=a \quad /\cdot(-1)\\
x+2y+3z&=b\\
3y+5z&=c\\
\hline
\boxed{y}+2z&=b-a \quad /\cdot(-3)\\
3y+5z&=c\\
\hline
-z&=3a-3b+c
\end{aligned}$$
$$\Rightarrow z=-3a+3b-c$$
$$y=b-a-2z=b-a+6a-6b+2c=5a-5b+2c$$
$$x=a-y-z=a-(5a-5b+2c)-(-3a+3b-c)=-a+2b-c$$

$$(a,b,c)=\underline{(-a+2b-c)}u_1+\underline{(5a-5b+2c)}u_2+\underline{(-3a+3b-c)}u_3$$

а) $T(x,y,z)=(x,y,0)$
$$T(u_1)=T(1,1,0)=(1,1,0)=u_1$$
$$T(u_2)=T(1,2,3)=(1,2,0)=$$
$$=(-1+2\cdot2)u_1+(5\cdot1-5\cdot2)u_2+(-3\cdot1+3\cdot2)u_3=$$
$$=3u_1-5u_2+3u_3$$
$$T(u_3)=T(1,3,5)=(1,3,0)=$$
$$=(-1+2\cdot3)u_1+(5\cdot1-5\cdot3)u_2+(-3\cdot1+3\cdot3)u_3=$$
$$=5u_1-10u_2+6u_3$$
$$[T]_S=\begin{bmatrix}1&3&5\\0&-5&-10\\0&3&6\end{bmatrix}$$

б) $T(x,y,z)=(2x-7y-4z,\ 3x+y+4z,\ 6x-8y+z)$
$$T(u_1)=T(1,1,0)=(2-7,\ 3+1,\ 6-8)=(-5,4,-2)=$$
$$=(5+8+2)u_1+(-25-20-4)u_2+(15+12+2)u_3=$$
$$=15u_1-49u_2+29u_3$$
$$T(u_2)=T(1,2,3)=(2-14-12,\ 3+2+12,\ 6-16+3)=(-24,17,-7)=$$
$$=(24+34+7)u_1+(\underset{-120}{-5\cdot24}\ \underset{-85}{-5\cdot17}\ \underset{-14}{-14})u_2+(\underset{72}{3\cdot24}+\underset{51}{3\cdot17}+\underset{7}{7})u_3=$$
$$=65u_1-219u_2+130u_3$$
$$T(u_3)=T(1,3,5)=(1-21-20,\ 3+3+20,\ 6-24+5)=(-40,26,-13)=$$
$$=(40+52+13)u_1+(\underset{200}{-5\cdot40}\ \underset{130}{-5\cdot26}\ \underset{36}{-2\cdot13})u_2+(120+\underset{78}{3\cdot26}+13)u_3=$$
$$=105u_1-366u_2+211u_3$$
$$[T]_S=\begin{bmatrix}15&65&105\\-49&-219&-366\\29&130&211\end{bmatrix}$$

в) $T(x,y,z)=(z,\ y+z,\ x+y+z)$
$$T(u_1)=T(1,1,0)=(0,1,2)=(2-2)u_1+(-5+4)u_2+(3-2)u_3=0\cdot u_1-u_2+u_3$$
$$T(u_2)=T(1,2,3)=(3,5,6)=(-3+10-6)u_1+(15-25+12)u_2+(-9+15-6)u_3=u_1+2u_2+0\cdot u_3$$
$$T(u_3)=T(1,3,5)=(5,8,9)=(-9+16-5)u_1+(25-40+18)u_2+(-15+24-9)u_3=2u_1+3u_2+0\cdot u_3$$
$$[T]_S=\begin{bmatrix}0&1&2\\-1&2&3\\1&0&0\end{bmatrix}$$