

КРИВЕ У РАВНИ

ПРЕСЕК ПРАВЕ И КРУГА

$k(C, r)$ C - ЦЕНТАР КРУГА
 r - ПОЛУПРЕЧНИК

$p: P, \vec{p}$

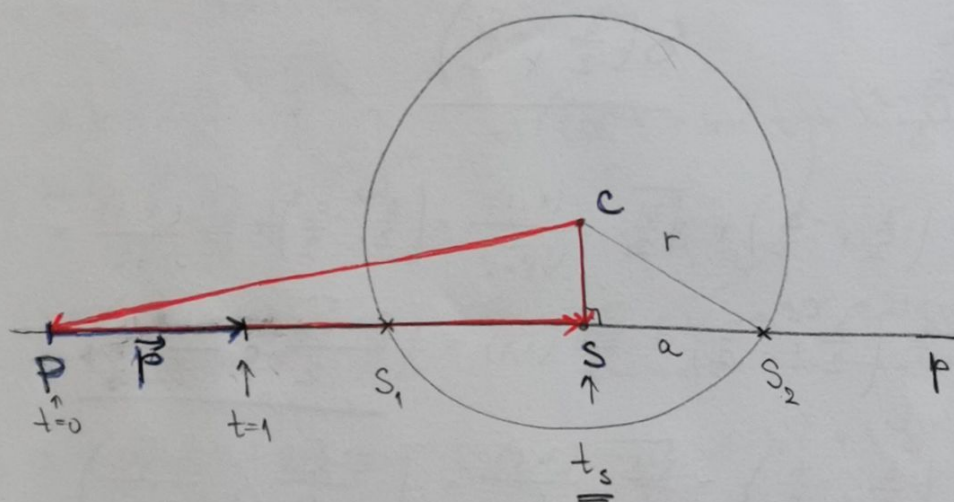
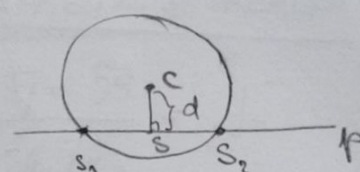
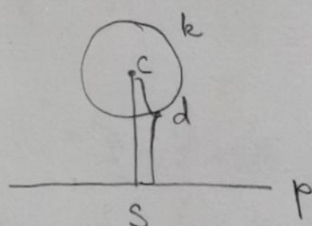
$d = d(C, p)$

S - НОРМАЛНА ПРОЈЕКЦИЈА ЦЕНТРА КРУГА C НА ПРАВОЈ p

1° $k \cap p = \emptyset$

2° $k \cap p = \{S\}$

3° $k \cap p = \{S_1, S_2\}$



$$\vec{CS} = \vec{CP} + t_s \cdot \vec{p} \quad | \cdot \vec{p}$$

$$\vec{CS} \cdot \vec{p} = \vec{CP} \cdot \vec{p} + t_s \vec{p} \cdot \vec{p}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \vec{CP} \cdot \vec{p} + t_s \|\vec{p}\|^2$$

$$\Rightarrow t_s = -\frac{\vec{CP} \cdot \vec{p}}{\|\vec{p}\|^2} = \frac{\vec{PC} \cdot \vec{p}}{\|\vec{p}\|^2}$$

$$t_s \mapsto p \Rightarrow S$$

$$\|\vec{CS}_1\| = \|\vec{CS}_2\| = r$$

$$\|\vec{SS}_2\| = \|\vec{SS}_1\| = a$$

$\triangle CSS_1, \triangle CSS_2$ су ПРАВОУГОЛНИ

$$S_1 = S - a \cdot \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}$$

$$S_2 = S + a \cdot \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|}$$

① Определите центр и полупречник круга $k: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$.

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 2 \cdot 2y + 2^2 - 4 - 11 = 0$$

получил по формуле квадрата

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 1 - 4 - 11 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

$$C(1, -2), r = 4$$

② Определить пересек круга k из уравнения задачи и
 прямой: а) $p: \vec{p} = (1, 1), P(2, -2)$

$k: C(1, -2) \quad r = 4$

$\vec{CP}(1, 0)$

$\vec{CP} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

$d(C, p) = \frac{\|\vec{CP} \times \vec{p}\|}{\|\vec{p}\|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \right\|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\|(0, 0, 1)\|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < r = 4$

$\Rightarrow \exists_2$ ПЕРЕСЕКАЮЩИХ Точек

$a = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{31}{2}}$

Подложим нормаль из точки C на p — точка S .

$t_s = \frac{\vec{PC} \cdot \vec{p}}{\|\vec{p}\|^2} = \frac{(-1, 0) \cdot (1, 1)}{1^2 + 1^2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow p: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 2 \end{cases}$

$t_s \rightsquigarrow p \Rightarrow S: \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2} \end{cases}$

$S\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

$S_2 = S + a \cdot \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} : \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right) + \sqrt{\frac{31}{2}} \cdot \frac{(1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right) + \frac{\sqrt{31}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} =$

$= \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right) + \frac{\sqrt{31}}{2} (1, 1) = \left(\frac{3 + \sqrt{31}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{31}}{2}\right)$

$S_1 = S - a \cdot \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} : \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right) - \frac{\sqrt{31}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{3 - \sqrt{31}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{31}}{2}\right)$

д) $g: x - y - 4 = 0$

I способ:

$k \cap g: \begin{cases} g: x - y - 4 = 0 \\ k: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{РЕШИМО СИСТЕМ}$

$g: y = x - 4 \rightsquigarrow k \Rightarrow x^2 + (x - 4)^2 - 2x + 4(x - 4) - 11 = 0$

$(\Rightarrow) x^2 + x^2 - 8x + 16 - 2x + 4x - 16 - 11 = 0$

$(\Rightarrow) 2x^2 - 6x - 11 = 0$

$x_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{36 + 88}}{4} = \frac{0 \pm \sqrt{124}}{4} = \frac{0 \pm \sqrt{4 \cdot 31}}{4} = \frac{0 \pm 2\sqrt{31}}{4}$

$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{31}}{2} \Rightarrow y_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{31}}{2} - 4 = \frac{-5 \pm \sqrt{31}}{2}$

II НАЙТИ:

$$g: x-y-4=0 \Rightarrow g: \begin{cases} x=t \\ y=t-4 \end{cases} \Rightarrow g: \vec{z}(1,1), Q(0,-4)$$

$$k: C(1,-2), r=4$$

$$d(C,g) = \frac{\|\vec{CQ} \times \vec{g}\|}{\|\vec{g}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} < r \Rightarrow \exists_2 \text{ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ТАЧЕК}$$

$$a = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{16 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{31}}{\sqrt{2}}$$

$$S: t_s = \frac{\vec{QC} \cdot \vec{g}}{\|\vec{g}\|^2} = \frac{(1,2) \cdot (1,1)}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow S: x = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}$$

$$S\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$$

$$S_2 = S + a \frac{\vec{g}}{\|\vec{g}\|} \Rightarrow S_2 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right) + \frac{\sqrt{31}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{3+\sqrt{31}}{2}, \frac{-5+\sqrt{31}}{2}\right)$$

$$S_1 = S - a \frac{\vec{g}}{\|\vec{g}\|} \Rightarrow S_1\left(\frac{3-\sqrt{31}}{2}, \frac{-5-\sqrt{31}}{2}\right)$$

③ Определить пересечение кривой $k: (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ и $l: x = -1 + 4 \cos t$
 $y = -1 + 4 \sin t, t \in [0, 2\pi)$.

$$l: \begin{cases} \cos t = \frac{x+1}{4} \\ \sin t = \frac{y+1}{4} \end{cases} \Rightarrow \cos^2 t + \sin^2 t = \frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{16} \Rightarrow$$

$$l: (x+1)^2 + (y+1)^2 = 16 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 = 0 \quad (1)$$

$$k: x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \quad (2) \quad \text{или} \quad (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

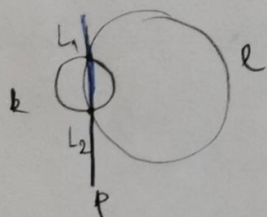
$$k \cap l = \{L_1, L_2\}: p \in L_1, L_2 \quad (1) - (2) \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 - (x^2 + y^2 - 8x - 6y) = 0$$

$$\text{или} \quad x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 - x^2 - y^2 + 8x + 6y = 0$$

$$\Leftrightarrow 10x + 8y - 14 = 0 \quad | :2$$

$$p: \boxed{5x + 4y - 7 = 0}$$

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ
КРИВОЙ k И l



$$k: O(4,3) \quad r_k = 5$$

$$l: L(-1,-1), r_l = 4$$

$$d = \frac{\|\vec{OP} \times \vec{P}\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -4 & -\frac{5}{4} & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{16+25}} = \frac{\|(0,0,25)\|}{\sqrt{41}} = \frac{25}{\sqrt{41}}$$

I НАЧИН:

$$t_s = \frac{\vec{PO} \cdot \vec{P}}{\|\vec{P}\|^2} = \frac{(4, \frac{5}{4}) \cdot (4, -5)}{\sqrt{16+25}^2} = \frac{16 - \frac{25}{4}}{41} = \frac{39}{4 \cdot 41} = \frac{39}{164}$$

$$t_s \leadsto P \Rightarrow S: \left(4 + \frac{39}{4 \cdot 41}, -5 \frac{39}{4 \cdot 41} + \frac{7}{4} \right) = \left(\frac{39}{41}, \frac{23}{41} \right)$$

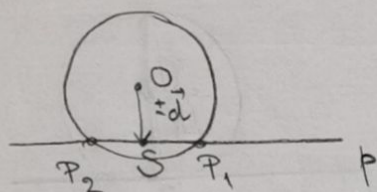
$$p: x=4t$$

$$y = -5t + \frac{7}{4}, \vec{P}(4, -5), P(0, \frac{7}{4})$$

$$P_1 = S + a \frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} = \left(\frac{119}{41}, -\frac{77}{41} \right)$$

$$P_2 = S - a \frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} = (-1, 3)$$

II НАЧИН:



$$S = O \pm d \cdot \vec{n}_p, S \in p$$

$$S = (4, 3) \pm \frac{25}{\sqrt{41}} \cdot \frac{(5, 4)}{\sqrt{25+16}} = (4, 3) \pm \frac{25}{\sqrt{41}} \cdot \frac{(5, 4)}{\sqrt{41}} =$$

$$= (4, 3) \pm \frac{(125, 100)}{41} = \left(\frac{4 \cdot 41 \pm 125}{41}, \frac{3 \cdot 41 \pm 100}{41} \right) =$$

$$= \left(\frac{164 \pm 125}{41}, \frac{123 \pm 100}{41} \right) \rightarrow S' \left(\frac{289}{41}, \frac{223}{41} \right) \leadsto p$$

$$\rightarrow S \left(\frac{39}{41}, \frac{23}{41} \right) \leadsto p$$

$$S' \leadsto p: 5 \cdot \frac{289}{41} + 4 \cdot \frac{223}{41} - 7 \neq 0 \Rightarrow S' \notin p$$

$$S \leadsto p: 5 \cdot \frac{39}{41} + 4 \cdot \frac{23}{41} - 7 = \frac{195 + 92}{41} - 7 = 7 - 7 = 0 \Rightarrow \underline{S \in p}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \left(\frac{39}{41}, \frac{23}{41} \right)}$$

$$a = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{25 - \frac{25^2}{41}} = \frac{20}{\sqrt{41}}$$

$$P_1 = S + a \cdot \frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} = \left(\frac{39}{41}, \frac{23}{41} \right) + \frac{20}{\sqrt{41}} \cdot \frac{(4, -5)}{\sqrt{16+25}} = \frac{1}{41} (39 + 80, 23 - 100) = \left(\frac{119}{41}, -\frac{77}{41} \right)$$

$$P_2 = S - a \frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} = \left(\frac{39}{41}, \frac{23}{41} \right) - \left(\frac{80}{41}, \frac{-100}{41} \right) = \underline{\underline{(-1, 3)}}$$

III НАЧИН: РЕШИМО СИСТЕМ $l \leadsto k$

$$l: x = -1 + 4 \cos t, y = -1 + 4 \sin t, t \in [0, 2\pi) \leadsto k: (-1 + 4 \cos t - 4)^2 + (-1 + 4 \sin t - 3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (4 \cos t - 5)^2 + (4 \sin t - 4)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 16 \cos^2 t - 40 \cos t + 25 + 16 \sin^2 t - 32 \sin t + 16 = 25$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 - 40 \cos t - 32 \sin t + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow -40 \cos t - 32 \sin t + 32 = 0 \quad | :8$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-5 \cos t - 4 \sin t + 4 = 0} \quad \text{w}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{5 \cos t + 4 \sin t = 4} \quad (*) \Rightarrow 4 \sin t = 4 - 5 \cos t$$

$$\sin t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 t} \rightsquigarrow (*) \Rightarrow 4(\pm \sqrt{1 - \cos^2 t}) = 4 - 5 \cos t \quad |^2$$

$$16(1 - \cos^2 t) = (4 - 5 \cos t)^2$$

$$\Leftrightarrow 16 - 16 \cos^2 t = 16 - 40 \cos t + 25 \cos^2 t$$

$$\Leftrightarrow 41 \cos^2 t - 40 \cos t = 0 \quad \text{w} \quad \cos t(41 \cos t - 40) = 0$$

$$\boxed{1^\circ} \cos t = 0$$

$$\underline{1^\circ} \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin t = 1$$

$$x = -1 + 4 \cos t = -1 + 4 \cdot 0 = -1$$

$$y = -1 + 4 \sin t = -1 + 4 \cdot 1 = 3$$

$$\boxed{P_1(-1, 3)} \rightsquigarrow p$$

$$5(-1) + 4 \cdot 3 - 7 = -5 + 12 - 7 = 0 \Rightarrow \boxed{P_1 \in p}$$

$$\underline{1^\circ 2^\circ} \quad t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin t = -1$$

$$x = -1 + 4 \cdot 0 = -1$$

$$y = -1 + 4(-1) = -5$$

$$P_1'(-1, -5) \rightsquigarrow p$$

$$5(-1) + 4(-5) - 7 \neq 0 \Rightarrow P_1' \notin p$$

$$\sqrt{\boxed{2^\circ}} \quad 41 \cos t - 40 = 0 \quad \text{w}$$

$$\cos t = \frac{40}{41} \Rightarrow \sin t = \pm \sqrt{1 - \cos^2 t} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{40}{41}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sin t = \pm \frac{\sqrt{41^2 - 40^2}}{41} = \pm \frac{\sqrt{(41-40)(41+40)}}{41} =$$

$$\sin t = \pm \frac{\sqrt{81}}{41} = \pm \frac{9}{41}$$

$$x = -1 + 4 \cdot \frac{40}{41} = \frac{119}{41}$$

$$\underline{2^\circ 1^\circ} \quad \sin t = \frac{9}{41}$$

$$P_2': y = -1 + 4 \cdot \frac{9}{41} = \frac{-41 + 36}{41} = -\frac{5}{41}$$

$$P_2' \left(\frac{119}{41}, -\frac{5}{41} \right) \rightsquigarrow p$$

$$5 \cdot \frac{119}{41} + 4 \left(-\frac{5}{41} \right) - 7 = \frac{5(119-4) - 7 \cdot 41}{41} = \frac{5 \cdot 115 - 7 \cdot 41}{41} \neq 0$$

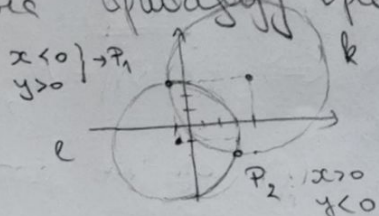
$$\underline{2^\circ 2^\circ} \quad \sin t = -\frac{9}{41}$$

$$P_2: y = -1 + 4 \left(-\frac{9}{41} \right) = -\frac{77}{41}$$

$$P_2 \rightsquigarrow p: 5 \cdot \frac{119}{41} + 4 \left(-\frac{77}{41} \right) - 7 = \frac{595 - 308 - 287}{41} = 0$$

$$\boxed{P_2 \left(\frac{119}{41}, -\frac{77}{41} \right)} \in p$$

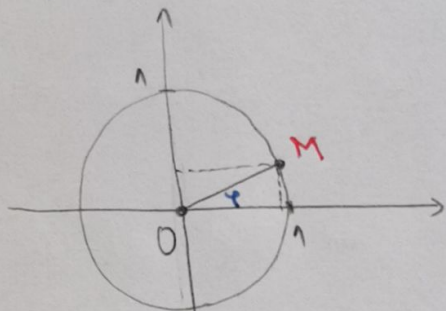
*
 Za danke specije matrice tangenta
 preračunamo opseg i bazu i račun
 oblikujemo opseg i specije
 danke



ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА КРУГА

* ЈЕДИНИЧНИ КРУГ СА ЦЕНТРОМ У КООРДИНАТНОМ ПОЧЕТКУ:

$$k: O(0,0) \quad r=1$$



$$M \in k: x = \cos \varphi$$

$$y = \sin \varphi$$

$$\underline{M(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)}$$

* $k: O(0,0), r=r$

$$\underline{M(\varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)}$$

$$M: \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

* $k: C(a,b), r=r$

$$M: \begin{cases} x = r \cos \varphi + a \\ y = r \sin \varphi + b \end{cases}$$

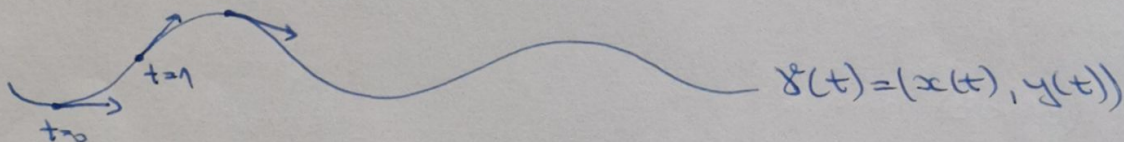
$$\underline{M(\varphi) = (r \cos \varphi + a, r \sin \varphi + b)}$$

ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА (КРУГА) ДУЖИНОМ ЛУКА

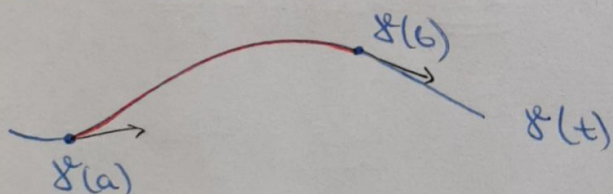
Деф: ПАРАМЕТРИЗОВАНА КРИВА У РАВНИ ЈЕ ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНО ПРЕСЛИКАВАЊЕ $d: (a,b) \rightarrow \mathbb{E}^2$ ИНТЕРВАЛА У РАВАН:

$$d(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in (a,b)$$

То је ГЛАТКА КРИВА АКО ЈЕ $d'(t) \neq (0,0), \forall t \in (a,b)$



ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА ДУЖИНОМ ЛУКА



ДУЖИНА ЛУКА: $|b-a|$

БРЗИНА у $\gamma(a): \dot{\gamma}(t) = (x'(t), y'(t))$ за $t=a \Rightarrow \underline{\dot{\gamma}(a)}$

ПРИРОДНИ ПАРАМЕТАР
↓

* γ ЈЕ ПАРАМЕТРИЗОВАНА ДУЖИНОМ ЛУКА $\Leftrightarrow |\dot{\gamma}(s)| = 1, \forall s$

ДУЖИНА ЛУКА: $\int_a^b |\dot{\gamma}(s)| ds = \int_a^b ds = s \Big|_a^b = b-a$

АКО ИМАМО ПРОИЗВОЛЈНУ ПАРАМЕТРИЗАЦИЈУ $\gamma(t)$, ОД ЊЕ ДОБИЈАМО ПАРАМЕТРИЗАЦИЈУ ДУЖИНОМ ЛУКА: $s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\gamma}(t)| dt$

4) Определите параметризацию кривой $(x+2)^2 + y^2 = 4$ с помощью угла φ

$$k: (x+2)^2 + y^2 = 4$$

$$C(-2, 0), r=2$$

$$\Rightarrow k: \begin{cases} x = 2\cos\varphi - 2 \\ y = 2\sin\varphi \end{cases}, \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$k(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi)) = (2\cos\varphi - 2, 2\sin\varphi)$$

$$\dot{k}(\varphi) = (-2\sin\varphi, 2\cos\varphi)$$

$$|\dot{k}(\varphi)| = \sqrt{(-2\sin\varphi)^2 + (2\cos\varphi)^2} = \sqrt{4(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \text{кривая параметризована}$$

$$s(\varphi) = \int_0^\varphi |\dot{k}(t)| dt = \int_0^\varphi 2 dt = 2 \int_0^\varphi dt = 2 \cdot t \Big|_0^\varphi = \underline{2\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{s}{2}}$$

$$\Rightarrow k(s) = (2\cos\frac{s}{2} - 2, 2\sin\frac{s}{2}), s \in [0, 4\pi)$$

* ПРОВЕРКА:

$$\dot{k}(s) = (2 \cdot (-\sin\frac{s}{2}) \cdot \frac{1}{2}, 2 \cdot \cos\frac{s}{2} \cdot \frac{1}{2}) = (-\sin\frac{s}{2}, \cos\frac{s}{2})$$

$$|\dot{k}(s)| = \sqrt{(-\sin\frac{s}{2})^2 + (\cos\frac{s}{2})^2} = \sqrt{1} = 1 \quad \checkmark$$

КОНИЧЕСКИЙ ПРЕСЕК — ПРЕСЕК КОНИСА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРЯМОЙ d .
КОНИКА — ПРЕСЕК КОНИСА С ПРЯМОЙ d , КОТОРАЯ НЕ СОРВАННА СЕРИИ ТЕМЕ КОНИСА.
ТЕОРЕМА: $\exists$ ПРЯМОЙ d **КОНИКЕ** ПОСТОЯН ПРЯМА d И Точка F

т.е. JE OДНОC PACTOЯHИA: $e = \frac{d(M, F)}{d(M, d)}$ ПРОВОЗВОДНЕ Точке M КОНИКЕ ОР F И ОР ПРЯМЕ d КОНСТАНТА.

$e \geq 0$, e — **ЭКЦЕНТРИЦИТЕТ** КОНИКЕ

F — **ЖИЗКА**

d — **ДИРЕКТРИСА**

* $0 \leq e < 1$ **ЭЛЛИПСА** ($e=0$ — КРУГ)

* $e=1$ **ПАРАБОЛА**

* $e > 1$ **ГИПЕРБОЛА**

⑤ Покажите, что для гиперболической линии: $|d(M, F_1) - d(M, F_2)| = 2a$.

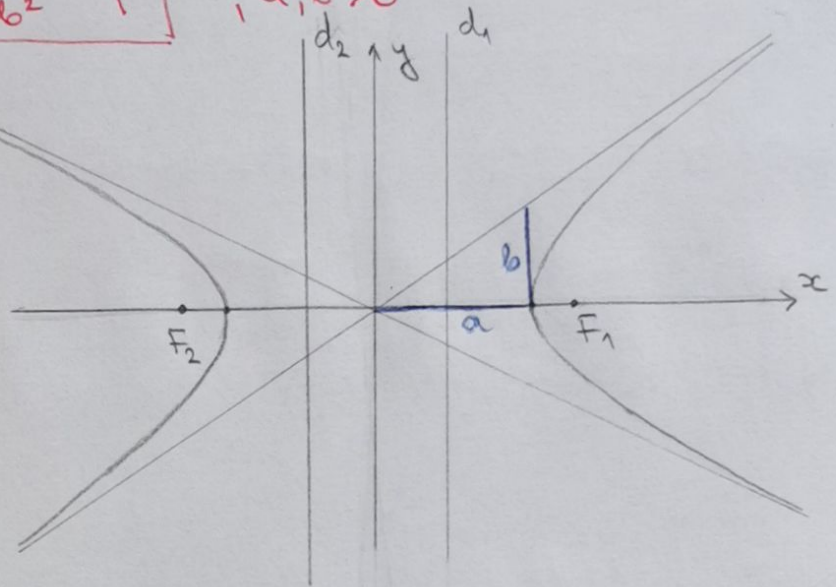
ХИПЕРБОЛА:

$$\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a, b > 0$

d_1, d_2 - директрисы $|d_{1/2}: x = \pm \frac{a}{e}|$

F_1, F_2 - фокусы $|F_{1/2}(\pm c, 0)|$
 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$



На любой произвольной ветви гиперболической линии $e = \frac{d(M, F)}{d(M, d)} \Rightarrow$

$$\underline{d(M, F) = e \cdot d(M, d) \Rightarrow}$$

$$\left. \begin{array}{l} d(M, F_1) = e \cdot d(M, d_1) \\ d(M, F_2) = e \cdot d(M, d_2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \uparrow \\ (2) \downarrow \end{array} \Rightarrow d(M, F_1) - d(M, F_2) = e \cdot (d(M, d_1) - d(M, d_2))$$

$$\Rightarrow \underline{|d(M, F_1) - d(M, F_2)| = |e| |d(M, d_1) - d(M, d_2)| = e |d(d_1, d_2)| = e \cdot \text{const}_{d_1, d_2} (*)$$

$e > 0 \Rightarrow e > 1$
 $\uparrow$
 свой-ств-е гиперболической

$$\left. \begin{array}{l} d_1: x = \frac{a}{e} \\ d_2: x = -\frac{a}{e} \end{array} \right\} \Rightarrow |d(d_1, d_2)| = \left| \frac{a}{e} - \left(-\frac{a}{e}\right) \right| = \left| \frac{2a}{e} \right| = \frac{2a}{e} \rightsquigarrow (*)$$

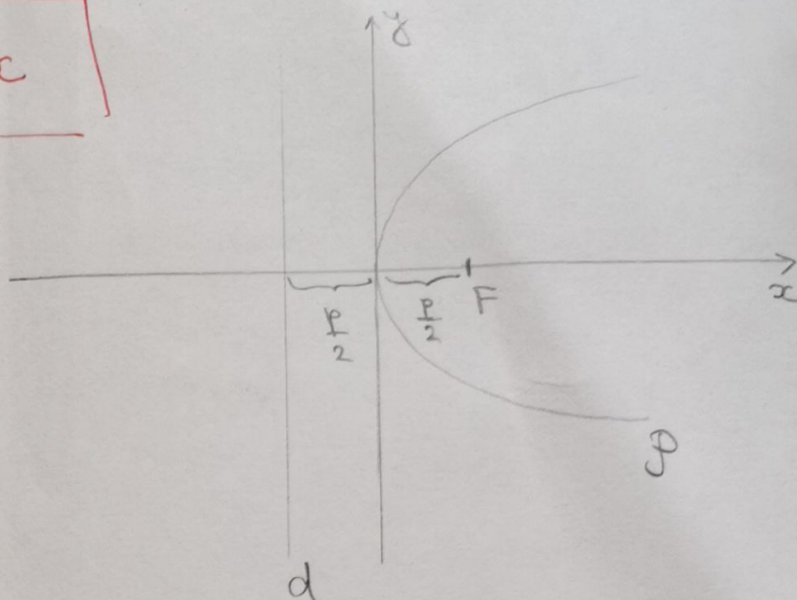
$$\Rightarrow \underline{|d(M, F_1) - d(M, F_2)| = \cancel{e} \cdot \frac{2a}{\cancel{e}} = \underline{\underline{2a}}}$$

ПАРАБОЛА :

$$P: y^2 = 2px$$

F - ЖИЖА

d - ДИРЕКТРИСА



ПАРАМЕТАРСКА Ј-НА ПАРАБОЛЕ

$$y^2 = 2px \Rightarrow x = \frac{y^2}{2p}$$

$$\Rightarrow \alpha(y) = \left(\frac{y^2}{2p}, y \right)$$

$$\dot{\alpha}(y) = \left(\frac{2y}{2p}, 1 \right) = \left(\frac{y}{p}, 1 \right) \Rightarrow \vec{t} = \left(\frac{y_0}{p}, 1 \right) \sim (y_0, p)$$

ТАНГЕНТА! $t: t \ni M_0(x_0, y_0)$, где $M_0 \in P$
 $\vec{t}(y_0, p)$

$$t: \frac{x-x_0}{y_0} = \frac{y-y_0}{p} \Leftrightarrow p(x-x_0) = y_0(y-y_0)$$

$$\Leftrightarrow p(x-x_0) = yy_0 - y_0^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ M_0 \in P \Rightarrow y_0^2 = 2px_0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$px - px_0 = yy_0 - 2px_0$$

$$\Leftrightarrow yy_0 = px - px_0 + 2px_0$$

$$\text{ш. } t: \boxed{yy_0 = p(x+x_0)}$$

⑥ Доказати оптичко својство параболе.

ТЕОРЕМА: ОПТИКА ОСОВИНА ПАРАБОЛЕ

Свеклости зрак који излази из жижне параболе одбија се од параболе паралелно њеној ос.

P-ПАРАБОЛА $\Rightarrow e=1 \Rightarrow d(M_0, F) = d(M_0, d)$ ш.

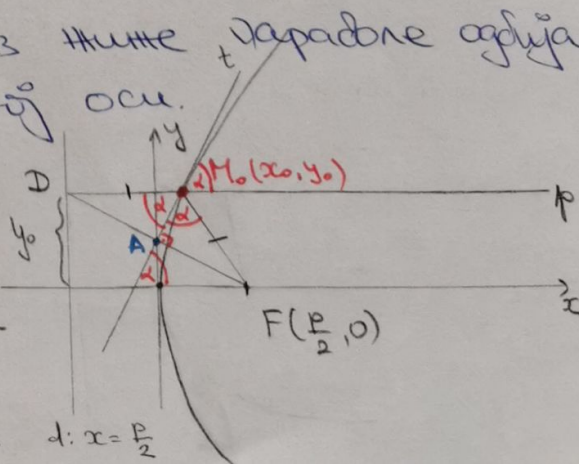
$$d(M_0, d) = M_0F$$

$$D: D \in d, D \in p$$

$$p: p \ni M_0, p \parallel O_x$$

$$\left. \begin{array}{l} D: D \in d, D \in p \\ p: p \ni M_0, p \parallel O_x \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{D(-\frac{p}{2}, y_0)}$$

ΔDM_0F је једнакокраки $\Rightarrow$ висине из M_0 , жижне -
 ина g_{M_0} из M_0 и симетрале g_{DF} се поклапају.



$$A = S(FD) \Rightarrow A(0, \frac{y_0}{2})$$

АМО ЈЕ СИМЕТРАЛА $\angle DMOF$

$$\angle DMOA = \angle AMOF$$

← ЗНАКРСНИ УГЛОВИ

УГЛОВИ СА ПАРАЛЕЛНИМ КРАЦИМА

$$\angle (AM_0, p) \stackrel{?}{=} \angle (AM_0, Ox)$$

ДА ЛИ ЈЕ AM_0 ТАНГЕНТА ПАРАБОЛЕ γM_0 ?

$$\vec{AM}_0 = (x_0, y_0) - (0, \frac{y_0}{2}) = (x_0, \frac{y_0}{2})$$

$$t: yy_0 = p(x+x_0) \quad \text{и} \quad px - yy_0 = px_0$$

$$\vec{n}_t(p, -y_0) \Rightarrow \vec{t}(y_0, p) \sim (\frac{y_0}{p}, 1) \stackrel{|\cdot \frac{y_0}{2}}{\sim} (\frac{y_0^2}{2p}, \frac{y_0}{2}) \sim (x_0, \frac{y_0}{2})$$

$$M_0 \in P: y_0^2 = 2px_0 \quad \parallel \vec{AM}_0$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{t} \sim \vec{AM}_0 \Rightarrow t \parallel AM_0 \\ t \ni M_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{t = AM_0}; \text{ Проба } AM_0 \text{ је тангента } \gamma \text{ у } M_0$$

$\Rightarrow$ Зрак који излази из тачке се одбаја од параболе паралелно њеној ос.

④ Одесди на канонски облик транслацијом:

$$a) x^2 - 3y^2 - 4x - 18y - 23 = 0$$

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$x^2 - 22x + 2^2 - 2^2 - 3(y^2 + 6y) - 23 = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 - 3(y^2 + 2 \cdot 3y + 9) - (-3) \cdot 9 - 23 = 0$$

$$(x-2)^2 - 3(y+3)^2 - 4 + 27 - 23 = 0$$

$$\boxed{(x-2)^2 - 3(y+3)^2 = 0} \quad (*)$$

$$\bar{x} = x - 2$$

$$\bar{y} = y + 3$$

$$\boxed{\bar{x}^2 - 3\bar{y}^2 = 0}$$

$$\Rightarrow (\underbrace{\bar{x} - \sqrt{3}\bar{y}}_{P_1})(\underbrace{\bar{x} + \sqrt{3}\bar{y}}_{P_2}) = 0 \quad \text{и}$$

ДВЕ ПРАВЕ P_1, P_2 КОЈЕ СЕ СЕСУ

$$d) 3y^2 + 6y - x - 1 = 0$$

$$3(y^2 + 2y) - x - 1 = 0$$

$$3(y^2 + 2y + 1) - 3 \cdot 1 - x - 1 = 0$$

$$3(y+1)^2 = x + 4 \quad (*)$$

$$\bar{x} = x + 4$$

$$\bar{y} = y + 1$$

$$3\bar{y}^2 = \bar{x}$$

$$\boxed{\bar{y}^2 = \frac{\bar{x}}{3}}$$

ПАРАБОЛА

$$x_{2p} = \frac{1}{3} \Rightarrow p = \frac{1}{6}$$

$$y) x^2 + 5y^2 - 4x - 10y + 8 = 0$$

$$\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{-4} + 5(y^2 - 2y + 1) + 8 = 0$$

$$(x-2)^2 + 5(y^2 - 2y + 1) - 5 \cdot 1 - 4 + 8 = 0$$

$$(x-2)^2 + 5(y-1)^2 = 1 \quad (*)$$

$$\bar{x} = x - 2$$

$$\bar{y} = y - 1$$

} \rightsquigarrow (*)

$$\Rightarrow \bar{x}^2 + 5\bar{y}^2 = 1$$

или

$$\boxed{\frac{\bar{x}^2}{1} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{1}{5}} = 1}$$

ЭЛЛИПСА

$$a=1, b=\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$g) x^2 + 25y^2 - 6x + 50y + 9 = 0$$

$$\underbrace{x^2 - 2 \cdot 3x + 9}_{-9} + 25(y^2 + 2y + 1) + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 + 25(y^2 + 2y + 1) - 25 \cdot 1 = 0$$

$$(x-3)^2 + 25(y+1)^2 = 25 \quad | :25$$

$$\frac{(x-3)^2}{25} + (y+1)^2 = 1 \quad (*)$$

$$\bar{x} = x - 3$$

$$\bar{y} = y + 1$$

} \rightsquigarrow (*)

$$\boxed{\frac{\bar{x}^2}{5^2} + \frac{\bar{y}^2}{1} = 1}$$

ЭЛЛИПСА, $a=5, b=1$

$$e) 9x^2 + 4y^2 + 16y + 16 = 0$$

$$9x^2 + 4(y^2 + 4y + 4) = 0$$

$$9x^2 + 4(y+2)^2 = 0 \quad (*)$$

$$\bar{x} = x$$

$$\bar{y} = y + 2$$

} \rightsquigarrow (*)

$$\Rightarrow \boxed{9\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 0}$$

ТАЧКА

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow (x, y) = (0, -2)$$

$$f) 4x^2 - y^2 - 24x + 4y + 32 = 0$$

$$4(x^2 - 6x) - (y^2 - 4y) + 32 = 0$$

$$4(x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 4 \cdot 9 - (y^2 - 4y + 4) - (-4) + 32 = 0$$

$$4(x-3)^2 - (y-2)^2 - 36 + 4 + 32 = 0$$

$$4(x-3)^2 - (y-2)^2 = 0 \quad (*)$$

$$\bar{x} = x - 3$$

$$\bar{y} = y - 2$$

} \rightsquigarrow (*)

$$\Rightarrow \boxed{4\bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 0}$$

ДВЕ ПРАВЕ КОЈЕ СЕ СЕКУ

$$\Rightarrow (2\bar{x} - \bar{y})(2\bar{x} + \bar{y}) = 0$$

" P_1 "

" P_2 "

$$\Gamma) 25x^2 - 4y^2 + 150x + 40y + 25 = 0$$

$$25(x^2 + 6x + 9) - 25 \cdot 9 - 4(y^2 - 10y + 25) - (-4) \cdot 25 + 25 = 0$$

$$25(x+3)^2 - 4(y-5)^2 - 200 + 100 = 0$$

$$25(x+3)^2 - 4(y-5)^2 = 100 \quad / : 100$$

$$\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{25} = 1 \quad (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} = x+3 \\ \bar{y} = y-5 \end{array} \right\} \leadsto (*) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\bar{x}^2}{4} - \frac{\bar{y}^2}{25} = 1}$$

ХИПЕРБОЛА $a=2, b=5$

$$\chi) y^2 - 36x - 2y - 35 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 - 1 - 36x - 35 = 0$$

$$(y-1)^2 - 36(x+1) = 0 \quad (*)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} = x+1 \\ \bar{y} = y-1 \end{array} \right\} \leadsto (*)$$

$$\boxed{\bar{y}^2 = 36 \bar{x}}$$

ПАРАБОЛА

$$2p = 36 \Rightarrow \boxed{p = 18}$$

⑧ Покажијте доказати да је круа $xy-1=0$ хипербола.

$$\text{Ј-та хипербола } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1 \quad (*)$$

Узет је да ј-та $xy-1=0$ записано асимптот ј-та $(*)$ $\neq$

$$\text{Нпр. } \left. \begin{array}{l} x = \bar{x} - \bar{y} \\ y = \bar{x} + \bar{y} \end{array} \right\} \Rightarrow (\bar{x} - \bar{y})(\bar{x} + \bar{y}) = 1 \text{ њ. } \bar{x}^2 - \bar{y}^2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{f}_1(1,1) \\ \vec{f}_2(-1,1) \end{array} \right\} \leftarrow \text{Провер се векторима } \vec{f}_1 \text{ и } \vec{f}_2 \text{ и њиховим скаларним произво-дом}$$

ИЗОМЕТРИЈА (доказано је показујући)

За матрицу показује се да је $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$ и $\|\vec{f}_1\| = \|\vec{f}_2\| = 1$.

• Проверимо да ли је $\vec{f}_1 + \vec{f}_2$:

$$\vec{f}_1 \circ \vec{f}_2 = (1,1) \circ (-1,1) = -1+1=0 \Rightarrow \vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$$

• Нормирамо:

$$\vec{g}_1 = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{g}_2 = \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|} = \frac{(-1,1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

↑
Найприме ротације око коор. почетка за угао φ

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{4}}$$

координатне осе

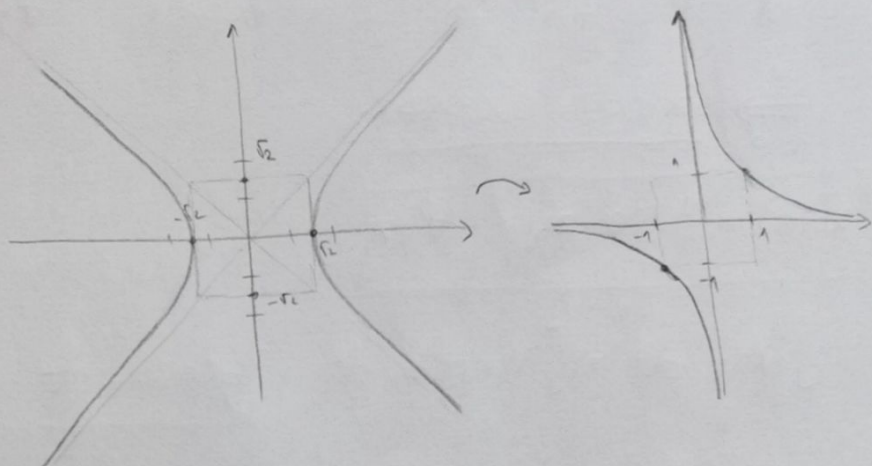
φ -не ротације су дакле:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{y} \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{y} \end{aligned} \quad \leadsto \quad xy - 1 = 0$$

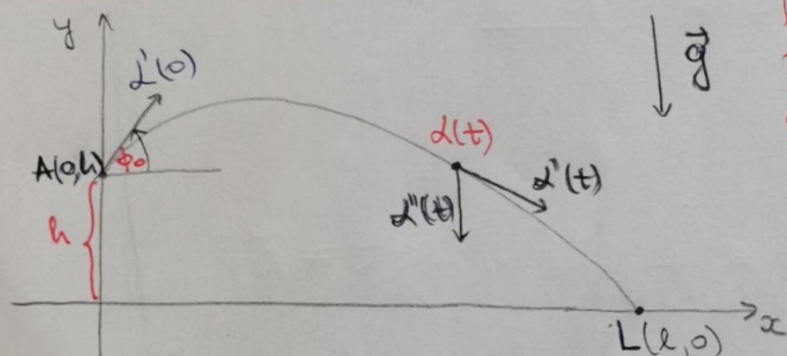
$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{y} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{y} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{x} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \bar{y} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 1}$$



КОСИ ХИТАЉ



h - ВИСИНА
 v_0 - ПОЧЕТНА БРЗИНА
 ϕ_0 - УГАО ИСПУШТАЊА КОСОГ ХИЦА
У ОДНОСУ НА ТЛО

ЗАПЕЧАТИМО ОДНОР БАЗИСУ

Будемо координатни систем тако да се пројектил испушта из тачке $A(0, h)$, а права која представља тло $y=0$. Тачка је

$$l(t) = (x(t), y(t)), \quad t \geq 0 \quad \text{вектор криве}$$

• У тренутку $t=0$; годимо тачку $l(0)=A$ $\Rightarrow \begin{cases} x(0)=0, \\ y(0)=h \end{cases} \quad (1)$

• ВЕКТОР БРЗИНЕ: $l'(t) = (x'(t), y'(t))$

у тренутку $t=0$ $\Rightarrow l'(0) = v_0 (\cos \phi_0, \sin \phi_0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x'(0) = v_0 \cos \phi_0 \\ y'(0) = v_0 \sin \phi_0 \end{cases} \quad (2)$$

(1), (2) су ПОЧЕТНИ УСЛОВИ КОСОГ ХИЦА.

• ВЕРТОР УБРАЗА: $\mathcal{L}''(t) = (x''(t), y''(t))$

(Теорема) сила која делује на пројектил је
ГРАВИТАЦИЈА $\Rightarrow$ убрзање пројектила је у свакој
тачки једнако правцаономе убрзању

$$\Rightarrow \mathcal{L}''(t) = \vec{g} = (0, -g), \quad \forall t \geq 0, \quad g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x''(t) = 0 \\ y''(t) = -g \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} (3) \Rightarrow x''(t) = 0 \Rightarrow x'(t) = \text{const} \quad \forall t \Rightarrow \underline{x'(0) = \text{const}} \\ \xrightarrow[t=0]{(2)} \underline{x'(0) = v_0 \cos \phi_0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{x'(t) = v_0 \cos \phi_0, \quad \forall t \geq 0}$$

$$\int \underbrace{x'(t)}_{x(t)} dt = \int v_0 \cos \phi_0 dt = \underline{v_0 \cos \phi_0 \cdot t + c}, \quad \forall t \geq 0$$

$$\xrightarrow[t=0]{(1)} x(0) = 0 = v_0 \cos \phi_0 \cdot 0 + c = c \Rightarrow \underline{c = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = v_0 \cos \phi_0 \cdot t} \quad (*)$$

$$\begin{array}{l} (3) \Rightarrow y''(t) = -g \Rightarrow \int \underbrace{y''(t)}_{y'(t)} dt = \int (-g) dt = -gt + \tilde{c} \\ \xrightarrow[t=0]{(2)} y'(0) = v_0 \sin \phi_0 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$y'(0) = -g \cdot 0 + \tilde{c} = v_0 \sin \phi_0 \Rightarrow \underline{\tilde{c} = v_0 \sin \phi_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'(t) = -gt + v_0 \sin \phi_0}$$

$$\Rightarrow \int \underbrace{y'(t)}_{y(t)} dt = \int (-gt + v_0 \sin \phi_0) dt = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \phi_0 t + c \quad \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[t=0]{(1)} y(0) = h$$

$$y(0) = -\frac{g \cdot 0}{2} + v_0 \sin \phi_0 \cdot 0 + c = h \Rightarrow c = h$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \phi_0 t + h}, t \geq 0 \quad (**)$$

(**), (*)

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos \phi_0 t \\ y(t) &= -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \phi_0 t + h, \quad t \geq 0 \end{aligned}}$$

Путanja каког хита је ПАРАБОЛА.

Ако коси хитај није вертикалан ($\cos \phi_0 \neq 0$) и почетна брзина није 0 ($v_0 \neq 0$) $\Rightarrow v_0 \cos \phi_0 \neq 0$

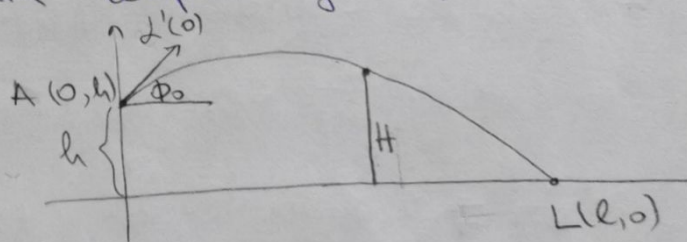
$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} t = \frac{x}{v_0 \cos \phi_0} \leadsto (**)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \phi_0} \right)^2 + v_0 \sin \phi_0 \frac{x}{v_0 \cos \phi_0} + h$$

$$\Rightarrow y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \phi_0} x^2 + \frac{\sin \phi_0}{\cos \phi_0} x + h \quad (y = ax^2 + bx + c \text{ је парабла})$$

↑
Ј-НА ПАРАБОЛЕ

9) Метисер висине 1,8m савируа са основне линије. Ако је почетна брзина ударања $180 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, дог којим брзином ~~утиче~~ утиче пред ударили пољу га да она заврши у догу продиштика? Дужина терена је 23,77m, а висина мрене 91,4cm.



$$h = 1,8 \text{ m}$$

$$v_0 = 180 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$l = 23,77 \text{ m}$$

$$H - \text{висина мрене}, H = 91,4 \text{ cm}$$

Како није у хитају вертикалан $\cos \phi_0 \neq 0 \Rightarrow v_0 \cos \phi_0 \neq 0$

$$\Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \phi_0}, \quad y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \phi_0} x^2 + \frac{\sin \phi_0}{\cos \phi_0} x + h$$

Угао да лоптица падне на крај терена:

$$\bullet L(l, 0) \quad x = l \quad y = 0 \quad \Rightarrow -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \phi_0} l^2 + \frac{\sin \phi_0}{\cos \phi_0} l + h = 0 \quad | \cdot \cos^2 \phi_0 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{g}{2v_0^2} l^2 + \sin \phi_0 \cos \phi_0 l + h \cos^2 \phi_0 = 0, \quad \text{СМЕНА:} \quad \begin{aligned} \sin \phi_0 &= \frac{tg \phi_0}{\sqrt{1+tg^2 \phi_0}} \\ \cos \phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 \phi_0}} \end{aligned}$$

$$-\frac{gl^2}{2v_0^2} + \frac{tg\phi_0}{\sqrt{1+tg^2\phi_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\phi_0}} l + h \cdot \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\phi_0}} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{gl^2}{2v_0^2} + \frac{tg\phi_0}{1+tg^2\phi_0} l + h \frac{1}{1+tg^2\phi_0} = 0 \quad | \cdot (1+tg^2\phi_0)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{gl^2}{2v_0^2} (1+tg^2\phi_0) + l tg\phi_0 + h = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{gl^2}{2v_0^2} tg^2\phi_0 + l tg\phi_0 + h - \frac{gl^2}{2v_0^2} = 0, \quad \boxed{tg\phi_0 = s}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{gl^2}{2v_0^2} s^2 + l s + h - \frac{gl^2}{2v_0^2} = 0 \quad | \cdot 2v_0^2$$

$$\Leftrightarrow -gl^2 s^2 + 2v_0^2 l s + (2v_0^2 h - gl^2) = 0$$

$$\begin{aligned} s_{1/2} &= \frac{-2v_0^2 l \pm \sqrt{4v_0^4 l^2 + 4gl^2(2v_0^2 h - gl^2)}}{-2gl^2} \\ &= \frac{-2l v_0^2 \pm 2l \sqrt{v_0^4 + g(2v_0^2 h - gl^2)}}{-2gl^2} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 + g(2v_0^2 h - gl^2)}}{gl} \end{aligned}$$

$$+ v_0 = 180 \frac{km}{h} = 180 \frac{1000m}{3600 \cdot sec} = 50 \frac{m}{sec}$$

$$v_0^4 + g(2v_0^2 h - gl^2) = 50^4 \frac{m^4}{sec^4} + 9,81 \frac{m}{sec^2} (2 \cdot 1,8m \cdot 50^2 \frac{m^2}{sec^2} - 9,81 \frac{m}{sec^2} \cdot (23,77)^2 m^2) =$$

$$= (50^4 + 9,81(3,6 \cdot 2500 - 9,81 \cdot 565,0129)) \frac{m^4}{sec^4} = (50^4 + 9,81(9000 - 5542,776549)) \frac{m^4}{sec^4} =$$

$$= (50^4 + 9,81 \cdot 3457,223451) \frac{m^4}{sec^4} = (6250000 + 33915,36205) \frac{m^4}{sec^4} = 6283915,362 \frac{m^4}{sec^4}$$

$$\begin{aligned} s_{1/2} &= \frac{50^2 \frac{m^2}{sec^2} \pm 2506,773895 \frac{m^2}{sec^2}}{9,81 \frac{m}{sec^2} \cdot 23,77m} = \frac{(2500 \pm 2506,773895) \frac{m^2}{sec^2}}{233,1837 \frac{m^2}{sec^2}} \\ &\quad \nearrow -0,029049607 \\ &\quad \searrow 21,47137169 \end{aligned}$$

$$tg\phi_0 = -0,029049607 \Rightarrow \underline{\underline{\phi_0 = -1,663951963^\circ}}$$

$$tg\phi_0 = 21,47137169 \Rightarrow \underline{\underline{\phi_0 = 87,33345371^\circ}}$$

* УГЛО ДА ПОПТИКА УДАРИ У ПРЕТЦИЉУ:

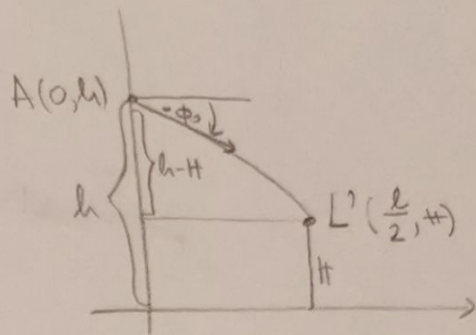
$$L'(\frac{l}{2}, H) = (11,885, 0,914)$$

$$l = 23,77 \text{ m}$$

$$H = 91,4 \text{ cm} = 0,914 \text{ m}$$

$$h' = h - H = 1,8 \text{ m} - 0,914 \text{ m} = 0,886 \text{ m}$$

$$x = \frac{l}{2} = 11,885$$



$$y = 0,914 \Rightarrow -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \phi_0} \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{\sin \phi_0}{\cos \phi_0} \frac{l}{2} + h' = 0 \quad | \cdot \cos^2 \phi_0 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{gl^2}{2 \cdot 4 v_0^2} + \sin \phi_0 \cos \phi_0 \frac{l}{2} + h' \cos^2 \phi_0 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{смена} \\ \sin \phi_0 = \frac{\tan \phi_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{gl^2}{8v_0^2} + \frac{\tan \phi_0}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}} \frac{l}{2} + h' \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \phi_0} = 0 \quad \cos \phi_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi_0}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{gl^2}{8v_0^2} + \frac{l \tan \phi_0}{2(1 + \tan^2 \phi_0)} + \frac{h'}{1 + \tan^2 \phi_0} = 0 \quad | \cdot 8(1 + \tan^2 \phi_0)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{gl^2}{v_0^2} (1 + \tan^2 \phi_0) + 4l \tan \phi_0 + 8h' = 0 \quad | \cdot v_0^2$$

$$\Leftrightarrow -gl^2 - gl^2 \tan^2 \phi_0 + 4lv_0^2 \tan \phi_0 + 8h'v_0^2 = 0 \quad \begin{array}{l} \text{смена} \\ \tan \phi_0 = \lambda \end{array}$$

$$\Leftrightarrow -gl^2 - gl^2 \lambda^2 + 4lv_0^2 \lambda + 8h'v_0^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -gl^2 \lambda^2 + 4lv_0^2 \lambda + 8h'v_0^2 - gl^2 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-4lv_0^2 \pm \sqrt{16l^2v_0^4 + 4gl^2(8h'v_0^2 - gl^2)}}{-2gl^2} = \frac{+(4lv_0^2 \pm 2l\sqrt{4v_0^4 + g(8h'v_0^2 - gl^2)})}{+2gl^2} = \frac{2(2v_0^2 \pm \sqrt{4v_0^4 + g(8h'v_0^2 - gl^2)})}{2gl^2} = \frac{2v_0^2 \pm \sqrt{4v_0^4 + g(4h'v_0^2 - gl^2)}}{gl^2}$$

$$v_0 = 50 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

$$\begin{aligned} 4v_0^4 + g(8h'v_0^2 - gl^2) &= 4 \cdot 50^4 \frac{\text{m}^4}{\text{sec}^4} + 9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} (8 \cdot 0,886 \text{ m} \cdot 50^2 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2} - 9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \cdot 23,77^2 \text{ m}^2) = \\ &= (4 \cdot 50^4 + 9,81(14720 - 5542,71659)) \frac{\text{m}^4}{\text{sec}^4} = (4 \cdot 50^4 + 9,81 \cdot 12177,2234) \frac{\text{m}^4}{\text{sec}^4} = \end{aligned}$$

$$= (25000000 + 119458,5621) \frac{\text{м}^4}{\text{сек}^4} = 25119458,56 \frac{\text{м}^4}{\text{сек}^4}$$

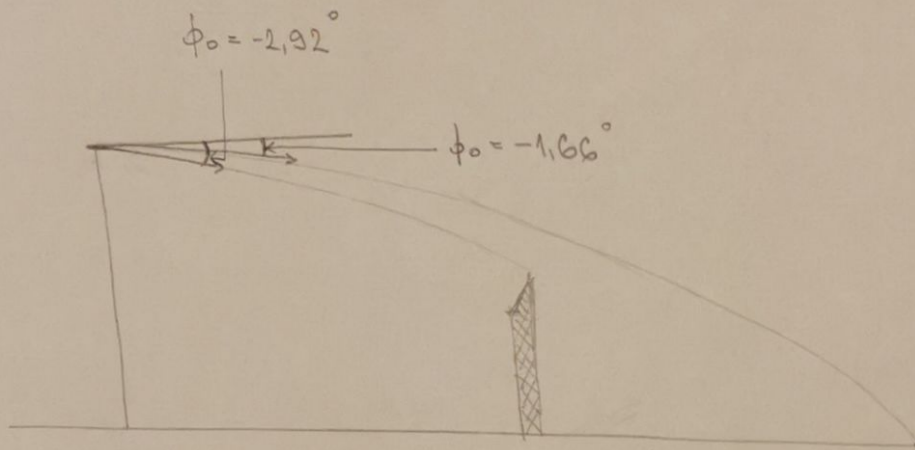
$$\Delta_{1/2} = \frac{2 \cdot 50^2 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2} + \sqrt{25119458,56 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2}}}{9,81 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2} \cdot 23,77 \text{м}} = \frac{(5000 + 5011,93162) \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2}}{233,1837 \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2}} = \begin{matrix} \nearrow -0,051168327 \\ \searrow 42,93581249 \end{matrix}$$

$$\text{tg} \phi_0 = -0,051168327$$

$$\Rightarrow \phi_0 = -2,929174624^\circ$$

$$\text{tg} \phi_0 = 42,93581249$$

$$\Rightarrow \phi_0 = 88,66578924^\circ$$



$$-2,92 < \phi_0 \leq -1,66$$

ДОПУЩА МОЖЕ ПАСИ НА ЛИНИЈУ

(АДН И ТО СЕ СМАТРА ТЕРИТОРИЈА ТЕРИТОРИЈА)

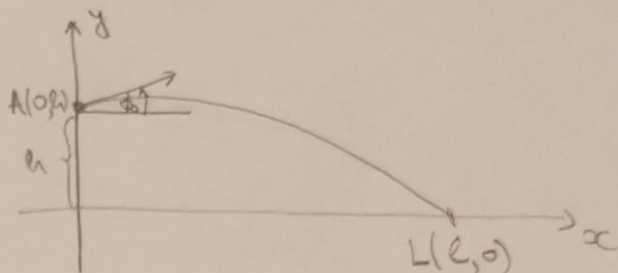
10) Кака су крива се криве висине 10m и нађена су на удаљености од 15m од ње. Коликом су се држицом (у km/h) која крива пре лага?

$$h = 10m$$

$$l = 15m$$

$$\phi_0 = 0 \Rightarrow \cos \phi_0 = 1, \sin \phi_0 = 0$$

$$V_0 = ?$$



На крају пута: $L(15, 0)$: $x(t) = V_0 \cos \phi_0 t \Rightarrow 15 = V_0 t$
 $y(t) = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \phi_0} x^2 + \frac{\sin \phi_0}{\cos \phi_0} x + h \Rightarrow -\frac{g}{2V_0^2} x^2 + h = 0$

$$\Rightarrow V_0 t = 15 \quad x = 15m$$

$$h = \frac{g}{2V_0^2} x^2 \Rightarrow V_0^2 = \frac{gx^2}{2h} = \frac{10 \frac{m}{sec^2} \cdot 15^2 m^2}{2 \cdot 10m} = \frac{225}{2} \frac{m^2}{sec^2} \Rightarrow V_0 = \frac{15}{\sqrt{2}} \frac{m}{sec} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \frac{m}{sec}$$

$$1km = 1000m$$

$$1h = 3600sec$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{15}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1000} \frac{km}{\frac{1}{3600} h} = \frac{15}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3600}{1000} \frac{km}{h} = \frac{15 \cdot 36}{10\sqrt{2}} = \frac{54}{\sqrt{2}} \frac{km}{h} \approx 38 \frac{km}{h}$$

Традиционално $g = 9,81 \frac{m}{sec^2}$, али због мале разлике рачуна узимано је $g \approx 10 \frac{m}{sec^2}$.

БЕЗИЈЕРОВЕ КРИВЕ.

Дефиниција: Нека су $P_0, P_1, \dots, P_n$ $n+2$ тачке равни. БЕЗИЈЕРОВА КРИВА СТЕПЕНА n

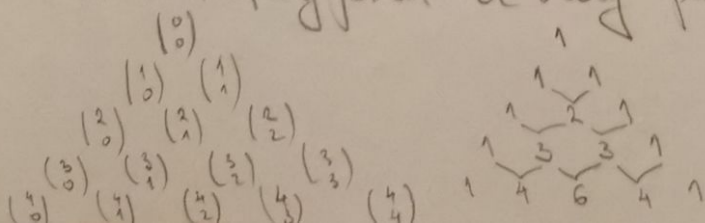
ЈЕ:
$$L_n(t) = \sum_{i=0}^n \underbrace{\binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}}_{B_i(t)} P_i = \sum_{i=0}^n B_i(t) P_i, \quad t \in [0, 1].$$

P_i - КОНТРОЛНЕ ТАЧКЕ, $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ - КОНТРОЛНА ПОЛИГОНСКА ЛИНИЈА

B_i - БЕРНШТАЈНОВИ ПОЛИНОМИ (или базе фје)

$\binom{n}{i}$ - БИНОМНИ КОЕФИЦИЈЕНТИ $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

Биномни коефицијенти се могу рачунаати преко Паскаловог троугла



РЕКУРСИВНА ДЕФИНИЦИЈА

$$\underline{d_{P_0}(t) = P_0}$$

$$d_1, 1 \text{ сценариј криве} : \underline{d_{P_0 P_1}(t) = (1-t)P_0 + tP_1}, t \in [0,1]$$

$$\begin{aligned} d_2, 2 \text{ сценарија криве} : \underline{d_{P_0 P_1 P_2}(t) &= (1-t)d_{P_0 P_1} + t d_{P_1 P_2} =} \\ &= (1-t)[(1-t)P_0 + tP_1] + t[(1-t)P_1 + tP_2] = \\ &= \underline{(1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2} \end{aligned}$$

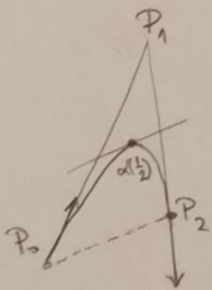
$$\begin{aligned} d_3, 3 \text{ сценарија криве} : \underline{d_{P_0 P_1 P_2 P_3}(t) &= (1-t)d_{P_0 P_1 P_2} + t d_{P_1 P_2 P_3} =} \\ &= (1-t)[(1-t)d_{P_0 P_1} + t d_{P_1 P_2}] + t[(1-t)d_{P_1 P_2} + t d_{P_2 P_3}] = \\ &= (1-t)^2 d_{P_0 P_1} + 2t(1-t)d_{P_1 P_2} + t^2 d_{P_2 P_3} = \\ &= (1-t)^2[(1-t)P_0 + tP_1] + 2t(1-t)[(1-t)P_1 + tP_2] + t^2[(1-t)P_2 + tP_3] = \\ &= \underline{(1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3} \end{aligned}$$

За $n=2$ њ. $d_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$

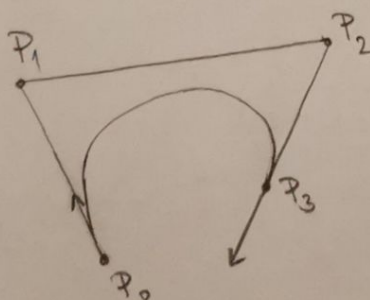
$$\begin{aligned} \dot{d}_2(t) &= 2(1-t)(-1)P_0 + (2(1-t) + 2t(-1))P_1 + 2tP_2 = \\ &= -2(1-t)P_0 + 2(1-2t)P_1 + 2tP_2 \end{aligned}$$

$$t = \frac{1}{2} \rightarrow \dot{d}_2\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(1-\frac{1}{2}\right)P_0 + 2\left(1-2\cdot\frac{1}{2}\right)P_1 + 2\cdot\frac{1}{2}P_2 = -P_0 + P_2 = P_2 - P_0$$

њ како за криву сценарија 2 бачиу га је $\dot{d}_2\left(\frac{1}{2}\right) \parallel P_0 P_2$



За $n=3$:



11) Определить Базисные кубы μ_{ij} с контрольные данные $P_0(1,1), P_1(2,2), P_2(4,-1)$.

$$\begin{aligned} d_2(t) &= (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + t^2 P_2 = \\ &= (1-3t+3t^2-t^3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3t-6t^2+3t^3) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= t^2 \begin{pmatrix} 1-4+4 \\ 1-4-1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2+4 \\ -2+4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d_2(t) = \underbrace{(1+2t+t^2)}_{x(t)}, \underbrace{(1+2t-4t^2)}_{y(t)}$$

12) Определить Базисные кубы μ_{ij} с контрольные данные $P_0(1,-1), P_1(2,0), P_2(4,-1), P_3(0,0)$.

$$\begin{aligned} d_3(t) &= (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3 = \\ &= (1-3t+3t^2-t^3) P_0 + 3(1-2t+t^2)t P_1 + (3t^2-3t^3) P_2 + t^3 P_3 = \\ &= (1-3t+3t^2-t^3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (3t-6t^2+3t^3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (3t^2-3t^3) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3+6 \\ 3+0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3-12+12 \\ -3+0-3 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} -1+6-12+0 \\ 1+0+3+0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$d_3(t) = \underbrace{(1+3t+3t^2-7t^3)}_{x(t)}, \underbrace{(-1+3t-6t^2+4t^3)}_{y(t)}$$

13) Даны с контрольные $P_0(2,3), P_1(-1,4), P_2(3,0), P_3(1,-2)$.

a) Определить Базисные кубы $d_3(t), t \in [0,1]$ с контрольные данные.

$$\begin{aligned} d_3(t) &= (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3 = \\ &= (1-3t+3t^2-t^3) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (3t-6t^2+3t^3) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + (3t^2-3t^3) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6-3 \\ -9+12 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 6+6+9 \\ 9-24+0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} -2-3-9+1 \\ -3+12+0-2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 21 \\ -15 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \end{pmatrix} t^3 \end{aligned}$$

$$\alpha_3(t) = \left(\underbrace{2 - 9t + 21t^2 - 13t^3}_{x(t)}, \underbrace{3 + 3t - 15t^2 + 7t^3}_{y(t)} \right), t \in [0, 1] (*)$$

* УКОЛИМО ЖЕЛИМО ДА ДЕФИНИШЕМО БЕЗИЈЕРОВУ КРИВУ НА ПРОИЗВОДНОМ ИНТЕРВАЛУ $[a, b]$, ПОТРЕБНО ЈЕ УВЕСТИ СМЕНУ:

$$t = \frac{u-a}{b-a}, u \in [a, b].$$

ЈЕДНАЧИНА БЕЗИЈЕРОВЕ КРИВЕ ПОСТАЈЕ:

$$\alpha_n(u) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{u-a}{b-a} \right)^i \left(\frac{b-u}{b-a} \right)^{n-i} P_i, u \in [a, b].$$

* ПРОМЕНА ПАРАМЕТРА НЕ МЕНЈА ОБЛИК КРИВЕ!

1) Одредити тангентне праве у тачкама P_0 и P_3 .

$$(*)' \Rightarrow \dot{\alpha}_3(t) = (-9 + 2 \cdot 21t - 3 \cdot 13t^2, 3 - 2 \cdot 15t + 3 \cdot 7t^2) = (-9 + 42t - 39t^2, 3 - 30t + 21t^2)$$

$P_0(2, 3)$

$$P_0: \underline{t=0} \Rightarrow \dot{\alpha}_3(0) = (-9, 3) \sim (-3, 1)$$

$$\boxed{t_{P_0}: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{1}}$$

$$\Leftrightarrow x-2 = -3(y-3) \Leftrightarrow \underbrace{x+3y-11=0}$$

Приметимо да $P_1(-1, 4) \in t_{P_0}$ њ. $-1+3 \cdot 4-11=0 \quad \forall \Rightarrow$

$$P_1 \in t_{P_0}, P_0 \in t_{P_0} \Rightarrow \boxed{P_0 P_1 = t_{P_0}}$$

$P_3(1, -2)$

$$P_3: \underline{t=1} \Rightarrow \dot{\alpha}_3(1) = (-9 + 42 - 39, 3 - 30 + 21) = (-6, -6) \sim (1, 1)$$

$$\boxed{t_{P_3}: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1}} \Leftrightarrow x-1=y+2 \Leftrightarrow \underbrace{x-y-3=0}$$

Приметимо да $P_2(3, 0) \in t_{P_3}$ њ. $3-0-3=0 \quad \forall \Rightarrow$

$$P_2 \in t_{P_3}, P_3 \in t_{P_3} \Rightarrow \boxed{P_2 P_3 = t_{P_3}}$$

у) Да ли је тангентна на криве у тачки $\alpha(\frac{1}{2})$ паралелна правој P_0P_3 ?

Тангента у тачки $\alpha(\frac{1}{2})$ има вектор правца $\dot{\alpha}(\frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned} \underline{t=\frac{1}{2}} \Rightarrow \dot{\alpha}_3(\frac{1}{2}) &= (-9 + 42 \cdot \frac{1}{2} - 39 \cdot \frac{1}{4}, 3 - 30 \cdot \frac{1}{2} + 21 \cdot \frac{1}{4}) = \\ &= (12 - \frac{39}{4}, -12 + \frac{21}{4}) = (\frac{9}{4}, -\frac{27}{4}) \sim \underline{(1, -3)} \end{aligned}$$

$$\underline{\vec{P_0P_3}} = (1, -2) - (2, 3) = \underline{(-1, -5)}$$

$(1, -3) \not\sim (-1, -5)$ и $\dot{\alpha}_3(\frac{1}{2}) \not\parallel \vec{P_0P_3}$ и НИСУ ПАРАЛЕЛНЕ!

г) Одредити криву добијену померањем контролне тачке P_2 за вектор $\vec{v} = (-7, -11)$. Да ли је тангентна на нове криве у тачки $\tilde{\alpha}_3(\frac{1}{2})$ паралелна правој P_0P_3 ?

$$\tilde{P}_2 = P_2 + \vec{v} = (3, 0) + (-7, -11) = (-4, -11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_3(t) &= (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t) t^2 \tilde{P}_2 + t^3 P_3 = \\ &= (1-3t+3t^2+t^3) P_0 + (3t-6t^2+3t^3) P_1 + (3t^2-3t^3) \tilde{P}_2 + t^3 P_3 = \\ &= (1-3t+3t^2-t^3) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (3t-6t^2+3t^3) \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + (3t^2-3t^3) \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6-3 \\ -9+12 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 6+6-12 \\ 9-24-33 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} -2-3+12+1 \\ -3+12+33-2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 8 \\ 40 \end{pmatrix} \\ &= \underline{(2-9t+8t^3, 3+3t-48t^2+40t^3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\alpha}}_3(t) &= (-9+24t^2, 3-2\cdot 48t+3\cdot 40t^2) \\ &= (-9+24t^2, 3-96t+120t^2) \\ \underline{t=\frac{1}{2}}: \dot{\tilde{\alpha}}_3(\frac{1}{2}) &= (-9+24\cdot \frac{1}{4}, 3-96\cdot \frac{1}{2}+120\cdot \frac{1}{4}) = \\ &= (-3, -15) \sim \underline{(1, 5)} \\ \dot{\tilde{\alpha}}_3(\frac{1}{2}) &= (1, 5) \sim \vec{P_0P_3} = (-1, -5) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ПАРАЛЕЛНЕ СУ!

14) У правни су гране $P_0(2,1), P_1(6,13), P_2(14,-7)$ и праве $p: y=5$,
 $g: x=7$ и $r: x=2+3s, y=12-2s, s \in \mathbb{R}$.

a) Написати Безијерову криву $d_2(t), t \in [0,1]$ који је контролни домина $P_0P_1P_2$.

$$\begin{aligned} d_2(t) &= (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)t P_1 + t^2 P_2 = \\ &= (1-2t+t^2) P_0 + (2t-2t^2) P_1 + t^2 P_2 = \\ &= (1-2t+t^2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + (2t-2t^2) \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4+12 \\ -2+26 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 2-12+14 \\ 1-26-7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 4 \\ -32 \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$d_2(t) = (2+8t+4t^2, 1+24t-32t^2)$$

б) Определити среден контролни домина са правима p, g, r .

$$\underline{P_0P_1}: \quad \overrightarrow{P_0P_1}(6-2, 13-1) = (4, 12) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} P_0P_1: x=4t+2 \\ y=12t+1 \end{array}, t \in [0,1] \right] \quad (1)$$

$$\underline{P_1P_2}: \quad \overrightarrow{P_1P_2}(14-6, -7-13) = (8, -20) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} P_1P_2: x=8s+6 \\ y=-20s+13 \end{array}, s \in [0,1] \right] \quad (2)$$

$\boxed{p: y=5}$ * $\underline{p \cap P_0P_1}$: (1) $\rightsquigarrow 5=12t+1 \Rightarrow \boxed{t=\frac{1}{3}} \Rightarrow$ п сече глнн P_0P_1
 $p \cap P_0P_1 = \{A\}: t=\frac{1}{3} \rightsquigarrow (1) \Rightarrow x=4 \cdot \frac{1}{3} + 2 = \frac{10}{3}, y=5 \Rightarrow \underline{\underline{A(\frac{10}{3}, 5)}}$
 * $\underline{p \cap P_1P_2}$: (2) $\rightsquigarrow 5=-20s+13 \Rightarrow s=\frac{2}{5} \Rightarrow$ п сече глнн P_1P_2
 $p \cap P_1P_2 = \{B\}: s=\frac{2}{5} \rightsquigarrow (2) \Rightarrow x=8 \cdot \frac{2}{5} + 6 = \frac{46}{5}, y=5 \Rightarrow \underline{\underline{B(\frac{46}{5}, 5)}}$

$$\boxed{p \cap P_0P_1P_2 = \{A, B\}} \quad \boxed{A(\frac{10}{3}, 5), B(\frac{46}{5}, 5)}$$

$\boxed{g: x=7}$ * $\underline{g \cap P_0P_1}$: (1) $\rightsquigarrow 7=4t+2 \Rightarrow t=\frac{5}{4} \notin [0,1] \Rightarrow$ г НЕ СЕЧЕ глнн P_0P_1
 * $\underline{g \cap P_1P_2}$: (2) $\rightsquigarrow 7=8s+6 \Rightarrow s=\frac{1}{8} \in [0,1] \Rightarrow$ г СЕЧЕ глнн P_1P_2
 $\underline{g \cap P_0P_1P_2 = \{C\}}: s=\frac{1}{8} \rightsquigarrow (2) y=-20 \cdot \frac{1}{8} + 13 = \frac{21}{2} \Rightarrow \underline{\underline{C(7, \frac{21}{2})}}$

$$r: \begin{cases} x = 2 + 3s \\ y = 12 - 2s \end{cases}, \vec{r}(3, -2) \quad R(2, 12)$$

$$* \underline{r \cap P_0 P_1}: \begin{matrix} \vec{P_0 P_1}(4, 12) \\ \vec{P_0 R}(0, 11) \end{matrix}$$

$$\boxed{P_0 P_1: \begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = 12t + 1 \end{cases}, t \in [0, 1]}$$

$$D(\vec{P_0 P_1}, \vec{r}) = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 36 = -44 \neq 0 \Rightarrow$$

$$t = \frac{D(\vec{P_0 R}, \vec{r})}{D(\vec{P_0 P_1}, \vec{r})} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 11 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{-44} = \frac{-33}{-44} = \frac{3}{4} \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow r \text{ сече } \underline{guy} P_0 P_1, \quad \underline{r \cap P_0 P_1 = \{M\}}$$

$$t = \frac{3}{4} \leadsto P_0 P_1 \Rightarrow M: \begin{cases} x = 4 \cdot \frac{3}{4} + 2 = 5 \\ y = 12 \cdot \frac{3}{4} + 1 = 10 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{M(5, 10)}}$$

$$* \underline{r \cap P_1 P_2}: \begin{matrix} \vec{P_1 P_2}(8, -20) \\ \vec{P_1 R}(-4, -1) \end{matrix}$$

$$\boxed{P_1 P_2: \begin{cases} x = 8t + 6 \\ y = -20t + 13 \end{cases}, t \in [0, 1]}$$

$$D(\vec{P_1 P_2}, \vec{r}) = \begin{vmatrix} 8 & -20 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -16 + 60 = 44 \neq 0 \Rightarrow$$

$$t = \frac{D(\vec{P_1 R}, \vec{r})}{D(\vec{P_1 P_2}, \vec{r})} = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{44} = \frac{8 + 3}{44} = \frac{11}{44} = \frac{1}{4} \in [0, 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \text{ сече } \underline{guy} P_1 P_2, \quad \underline{r \cap P_1 P_2 = \{N\}}$$

$$t = \frac{1}{4} \leadsto P_1 P_2 \Rightarrow N: \begin{cases} x = 8 \cdot \frac{1}{4} + 6 = 8 \\ y = -20 \cdot \frac{1}{4} + 13 = 8 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{N(8, 8)}}$$

$$\boxed{r \cap P_0 P_1 P_2 = \{M, N\}} \quad \boxed{M(5, 10), N(8, 8)}$$

у средњих пресека криве $d_2(t), t \in [0, 1]$ са правима P, Q, R . Упоредних парова пресека са садржајем контролне полилине (својство НАЈМАЊЕ ВАРИЈАЦИЈЕ).

СВОЈСТВО НАЈМАЊЕ ВАРИЈАЦИЈЕ

Ни једна права не пресеца Безијерову криву више од једног пута осим ако сече контролну полилину меду $P_0 P_1, \dots, P_{n-1} P_n$, иј.

$$\left(\begin{matrix} \text{БРОЈ ПРЕСЕЧНИХ ТАЧКА} \\ \text{ПРАВЕ И БЕЗИЈЕРОВЕ КРИВЕ} \end{matrix} \right) \leq \left(\begin{matrix} \text{БРОЈ ПРЕСЕЧНИХ ТАЧКА} \\ \text{КОНТРОЛНЕ ПОЛИЛИНСКЕ ЛИНИЈЕ И ПРАВЕ} \end{matrix} \right)$$

$$\bullet \boxed{p: y=5}$$

$$p \cap d_2(t): \text{ wj. } y=5 \leadsto d_2(t) = (x(t), y(t))$$

$$-32t^2 + 24t + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow -32t^2 + 24t - 4 = 0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow 8t^2 - 6t + 1 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} = \frac{6 \pm 2}{16} \rightarrow \frac{1}{2} \in [0, 1]$$

$$\frac{1}{4} \in [0, 1]$$

$\Rightarrow \exists_2$ upecenne wance $p \cap d_2(t)$.

$$\underline{t = \frac{1}{2}}: d_2\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 + 8 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4}, 1 + 24 \cdot \frac{1}{2} - 32 \cdot \frac{1}{4}\right) = (7, 5)$$

$$\underline{t = \frac{1}{4}}: d_2\left(\frac{1}{4}\right) = \left(2 + 8 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{16}, 1 + 24 \cdot \frac{1}{4} - 32 \cdot \frac{1}{16}\right) = \left(\frac{17}{4}, 5\right)$$

$$p \cap d_2(t) = \{d_2\left(\frac{1}{2}\right), d_2\left(\frac{1}{4}\right)\}$$

$$p \cap P_0 P_1 P_2 = \{A, B\}$$

$$2 \leq 2 \quad \checkmark$$

$$\bullet \boxed{q: x=7}$$

$$q \cap d_2(t): \text{ wj. } x=7 \leadsto d_2(t) = (x(t), y(t))$$

$$7 = 2 + 8t + 4t^2$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 8t - 5 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{8} = \frac{-8 \pm 12}{8} \rightarrow \frac{1}{2} \in [0, 1]$$

$$\rightarrow -\frac{5}{2} \notin [0, 1]$$

$\Rightarrow \exists_1$ upecenne wance $q \cap d_2(t)$

$$\underline{t = \frac{1}{2}}: d_2\left(\frac{1}{2}\right) = (7, 5) \Rightarrow$$

$$q \cap d_2(t) = \{d_2\left(\frac{1}{2}\right)\}, \quad q \cap P_0 P_1 P_2 = \{C\}$$

$$1 \leq 1 \quad \checkmark$$

$$\bullet \boxed{r: \begin{matrix} x=2+3s \\ y=12-2s \end{matrix}}$$

$$r \cap d_2(t): \text{ wj. } r \leadsto d_2(t) = (\overbrace{2+8t+4t^2}^{x(t)}, \overbrace{1+24t-32t^2}^{y(t)})$$

$$\Rightarrow 2 + 8t + 4t^2 = 2 + 3s$$

$$1 + 24t - 32t^2 = 12 - 2s$$

$$\boxed{3s = 4t^2 + 8t}$$

$$-2s = -32t^2 + 24t - 11$$

$$\left. \begin{matrix} \cdot 8 \\ + \end{matrix} \right\}$$

$$3\lambda - 4t^2 + 8t$$

$$24\lambda - 2\lambda = 32t^2 + 64t - 32t^2 + 24t - 11$$

$$3\lambda = 4t^2 + 8t$$

$$22\lambda = 88t - 11 \quad | :11 \Rightarrow 2\lambda = 8t - 1 \quad \dot{w}$$

$$\lambda = \frac{8t-1}{2}$$

$$\Rightarrow 4t^2 + 8t = 3 \cdot \frac{8t-1}{2} \quad \dot{w}$$

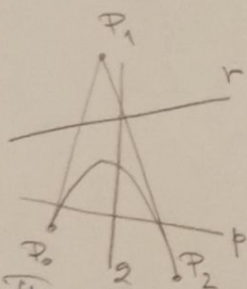
$$8t^2 + 16t - 24t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8t^2 - 8t + 3 = 0 \quad (*)$$

$$D = b^2 - 4ac = 64 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 64 - 96 = -32 < 0$$

$\Rightarrow$ У-на (*) нема реалних решења

$$\Rightarrow \underline{r \cap d_2(t) = \emptyset} \quad \dot{w} \quad \underline{r \text{ не сече } d_2(t)}.$$



$$r \cap d_2(t) = \emptyset$$

$$r \cap P_0 P_1 P_2 = \{M, N\}$$

$$0 \leq 2 \quad \checkmark$$

г) Покажи да је крива $d_2(t)$, $t \in [0, 1]$ гео парабола $y^2 = 4x$ (објасни афине инваријантност).

нп. Одреди макар једно афине пресликавање које криву $d_2(t)$ слика у гео парабола $y^2 = 4x$.

$$d_2(t) : P_0 P_1 P_2$$

$$\beta(t) : \text{Парабола } y^2 = 4x, \beta(t) = (t^2, 2t) \leftarrow \text{ово је једна параметризација ове параболе}$$

Задивимо β као Безијерову криву, $\dot{w}$ одредимо контролне тачке.

$$Q_0 = \beta(0) = (0, 0)$$

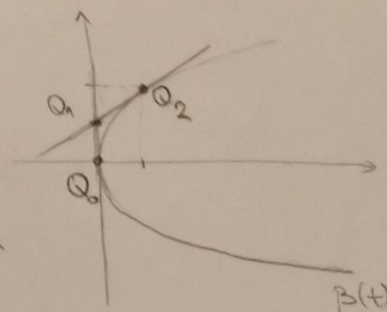
$$Q_2 = \beta(1) = (1, 2)$$

Q_1 одредимо као пресек тангенци у Q_0, Q_2 на параболу:

$$\dot{\beta}(t) = (2t, 2)$$

$$\dot{\beta}(0) = (0, 2) \sim (0, 1) \Rightarrow t_{Q_0}: x=0, y=t$$

$$\dot{\beta}(1) = (2, 2) \sim (1, 1) \Rightarrow t_{Q_2}: x=\lambda+1, y=\lambda+2$$



$$\Rightarrow \{Q_1\} = t_{Q_0} \cap t_{Q_2}$$

$$0 = \lambda + 1 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1} \Rightarrow \boxed{Q_1(0, 1)}$$

$$t = 2 + \lambda \Rightarrow t = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{t = 1}$$

Аффинное преобразование $f: P_0, P_1, P_2 \rightarrow Q_0, Q_1, Q_2$

$$\begin{array}{ccc} P_0(2, 1) & \xleftarrow{g} & O(0, 0) & \xrightarrow{h} & Q_0(0, 0) \\ P_1(6, 12) & \xleftarrow{g} & A(1, 0) & \xrightarrow{h} & Q_1(0, 1) \\ P_2(14, -7) & \xleftarrow{g} & B(0, 1) & \xrightarrow{h} & Q_2(1, 2) \end{array}$$

$$\xrightarrow{f = h \circ g^{-1}} \quad C$$

• $g: OAB \rightarrow P_0P_1P_2$

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{P_0P_1}(4, 12) \\ \overrightarrow{P_0P_2}(12, -8) \\ \overrightarrow{OP_0}(2, 1) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $P_0P_1 \quad P_0P_2 \quad OP_0$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} -8 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-32 - 144} \begin{bmatrix} -8 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-176} \begin{bmatrix} -8 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{44} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -8 \end{vmatrix} = -32 - 144 = -176$$

$$\Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{44} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - C^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{44} & \frac{3}{44} \\ \frac{3}{44} & -\frac{1}{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{44} & \frac{3}{44} \\ \frac{3}{44} & -\frac{1}{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{44} & \frac{3}{44} \\ \frac{3}{44} & -\frac{1}{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{7}{44} \\ \frac{5}{44} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow g^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{44} & \frac{3}{44} & -\frac{7}{44} \\ \frac{3}{44} & -\frac{1}{44} & -\frac{5}{44} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

• $h: OAB \rightarrow Q_0Q_1Q_2$

$$\begin{array}{l} \overrightarrow{Q_0Q_1} = (0, 1) \\ \overrightarrow{Q_0Q_2} = (1, 2) \\ \overrightarrow{OQ_0} = (0, 0) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow h = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $Q_0Q_1 \quad Q_0Q_2$

$$\Rightarrow f = h \circ g^{-1} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} \frac{2}{44} & \frac{3}{44} & -\frac{7}{44} \\ \frac{3}{44} & -\frac{1}{44} & -\frac{5}{44} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{44} & -\frac{1}{44} & -\frac{5}{44} \\ \frac{8}{44} & \frac{1}{44} & -\frac{17}{44} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow f \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{44} \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ -17 \end{bmatrix} \right)$$

СВОЈСТВО АФИНЕ ИНВАРИАНТНОСТИ:

Све Безијерове криве СТЕПЕНА 2 су афине еквивалентне.
 њ. Последица афине пројектирања где слика једну у
 другу (и свака је део неке ларабеле)

ДЕ-КАСТЕЛЛАУ АЛГОРИТАМ

(Једноставан начин одређивања слике $\lambda(t)$ на Безијеровој кривој је
 за неки $t \in [0, 1] \mapsto \lambda(t)$, али њој метод је нумерички нестабилан
 јер долази до грешке при рачунању Декартових координата.)

За одређивање слике $\lambda(t)$ на Безијеровој кривој корисније
 ДЕ-КАСТЕЛЛАУ алгоритам;

* ДЕЛИМО КОНТРОЛНЕ ПУНКТЕ у односу $t:(1-t)$ *

$$(C: \vec{AC}:\vec{CB} = t:(1-t) \Leftrightarrow (1-t)\vec{AC} = t\vec{CB} \Leftrightarrow (1-t)(C-A) = t(B-C) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-t)C - (1-t)A = tB - tC \Leftrightarrow (1-t+t)C = tB + (1-t)A \Leftrightarrow$$

$$C = A + t(B-A) \Leftrightarrow \underline{C = A + t \cdot \vec{AB}})$$

• ОБНАЧИМО КОНТРОЛНЕ ТАЧКЕ: $(n+1)$ -ТАЧКА

$$P_{00} = P_0, P_{01} = P_1, \dots, P_{0n-1} = P_{n-1}, P_{0n} = P_n$$

↑
ОЗНАКА ЗА БРОЈ ИТЕРАЦИЈЕ

"0-ИТЕРАЦИЈА" ЈЕ САМО
 ДОДЕЉИВАЊЕ

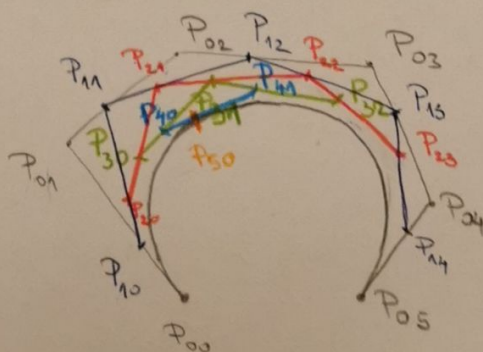
• ПРВИ, КОРАК (ДЕЛИМО КОНТРОЛНЕ ПУНКТЕ) n -ТАЧКА

$$P_{10}, P_{11}, \dots, P_{1n-1} \text{ њ. } P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0i+1}, i = \overline{0, (n-1)}$$

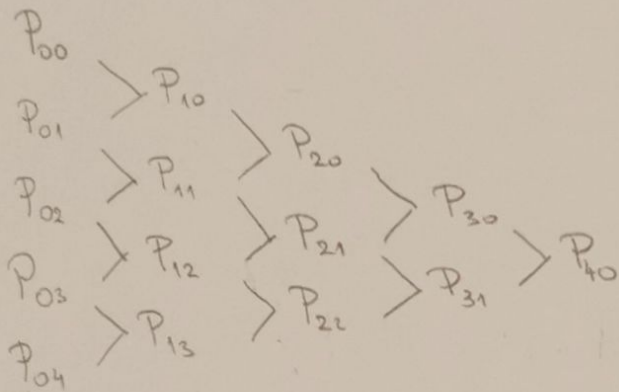
⋮

• n -ТИ КОРАК 1-ТАЧКА

$$P_{n0} = \lambda(t)$$



15) Упростите 2-каскадную архитектуру системы с помощью формулы безразмерных кривых $L_4(t)$ за $t = \frac{2}{3}$, если известны начальные кривые $P_0(7, -8), P_1(-11, 10), P_2(7, 46), P_3(34, 37), P_4(16, 1)$.



$$t = \frac{2}{3}$$

$$P_{10} = (1-t)P_{00} + tP_{01} = (1-\frac{2}{3})\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -11 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -11 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7-22 \\ -8+20 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -15 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \frac{1}{3}P_{01} + \frac{2}{3}P_{02} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -11 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 46 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -11+14 \\ 10+92 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$P_{12} = \frac{1}{3}P_{02} + \frac{2}{3}P_{03} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 \\ 46 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 34 \\ 37 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7+68 \\ 46+74 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 75 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$P_{13} = \frac{1}{3}P_{03} + \frac{2}{3}P_{04} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 34 \\ 37 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 16 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 34+32 \\ 37+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 66 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$P_{20} = \frac{1}{3}P_{10} + \frac{2}{3}P_{11} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 34 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5+2 \\ 4+68 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$P_{21} = \frac{1}{3}P_{11} + \frac{2}{3}P_{12} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 34 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+50 \\ 34+80 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 51 \\ 114 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 38 \end{pmatrix}$$

$$P_{22} = \frac{1}{3}P_{12} + \frac{2}{3}P_{13} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 22 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 25+44 \\ 40+26 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 69 \\ 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$P_{30} = \frac{1}{3}P_{20} + \frac{2}{3}P_{21} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 24 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 17 \\ 38 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1+34 \\ 24+76 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 33 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ \frac{100}{3} \end{pmatrix}$$

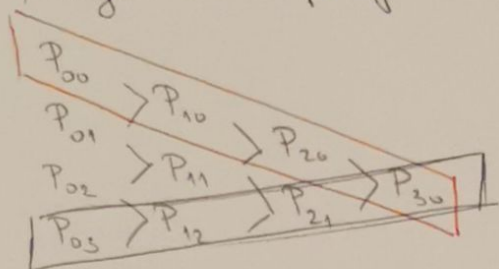
$$P_{31} = \frac{1}{3}P_{21} + \frac{2}{3}P_{22} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 17 \\ 38 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 23 \\ 22 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 17+46 \\ 38+44 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 63 \\ 82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ \frac{82}{3} \end{pmatrix}$$

$$P_{40} = \frac{1}{3}P_{30} + \frac{2}{3}P_{31} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 \\ \frac{100}{3} \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 21 \\ \frac{82}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11+42 \\ \frac{100}{3} + \frac{164}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 53 \\ \frac{264}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{53}{3} \\ \frac{88}{3} \end{pmatrix}$$

$$D) \quad L_4\left(\frac{2}{3}\right) = P_{40} = \left(\frac{53}{3}, \frac{88}{3}\right)$$

16) ДАТА ЈЕ БЕЗИЈЕРОВА КРИВА КОНТРОЛНИМ ТАЧКАМА $P_0(2, -3), P_1(0, 3), P_2(2, 9), P_3(8, 7)$.

а) Постројите криву на два дела израчунавајући рез у тачки $d_3(\frac{1}{2})$



$$t = \frac{1}{2}$$

$$P_{10} = (1 - \frac{1}{2})P_{00} + \frac{1}{2}P_{01} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+0 \\ -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \frac{1}{2}P_{01} + \frac{1}{2}P_{02} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0+2 \\ 3+9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

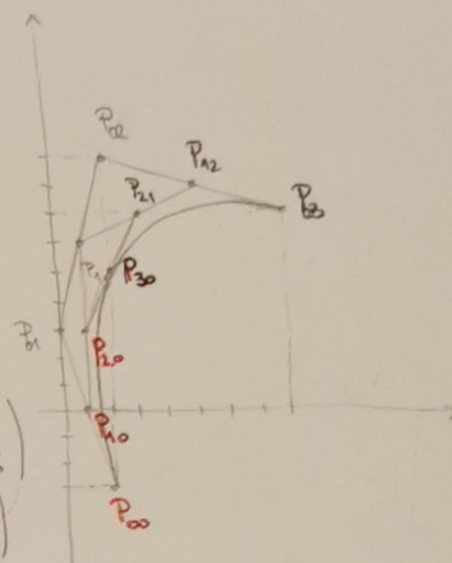
$$P_{12} = \frac{1}{2}P_{02} + \frac{1}{2}P_{03} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+8 \\ 9+7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$P_{20} = \frac{1}{2}P_{10} + \frac{1}{2}P_{11} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+1 \\ 0+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$P_{21} = \frac{1}{2}P_{11} + \frac{1}{2}P_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+5 \\ 6+8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$P_{30} = \frac{1}{2}P_{20} + \frac{1}{2}P_{21} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3 \\ 3+7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$d_3(\frac{1}{2}) = P_{30} = (2, 5)$$



$$d_3: P_{00}, P_{10}, P_{20}, P_{30}$$

$$\tilde{d}_3: P_{30}, P_{21}, P_{12}, P_{03}$$

> ове су Безијерове криве савене з као и
улазна Безијерова крива

ПОВЕЋАЊЕ СТЕПЕНА КРИВЕ

• d_n -Безијерова крива савена и одређена са $(n+1)$ контролних
тачака, $P_0, P_1, \dots, P_n$

* ПОВЕЋАВАМО СТЕПЕНА КРИВЕ ЗА 1 БЕЗ ПРОМЕНЕ НЕКОГ ОБЛИКА

Нове контролне тачке $Q_0, Q_1, \dots, Q_{n+1}$

- ПОЧЕТАК И КРАЈ ОСТАЈУ ФИКСИРАНИ

$$Q_0 = P_0, Q_{n+1} = P_n$$

- ОСТАЛЕ ТАЧКЕ: $Q_i = \frac{i}{n+1}P_{i-1} + (1 - \frac{i}{n+1})P_i, 1 \leq i \leq n.$

НАПОМЕНА: Одреде у ком тачка Q_i глуми P_{i-1}, P_i АИЈЕ
КОНСТАНТАН, већ зависи од i .

а) Проверим условие "леба" криве за 1.

$$Q_0 = P_{00} = (2, -3)$$

$$Q_4 = P_{30} = (2, 5)$$

↑
Леба крива је објек крива d_3^n :
 $P_{00} = (2, -3), P_{10} = (1, 0), P_{20} = (1, 3), P_{30} = (2, 5)$

$$Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i$$

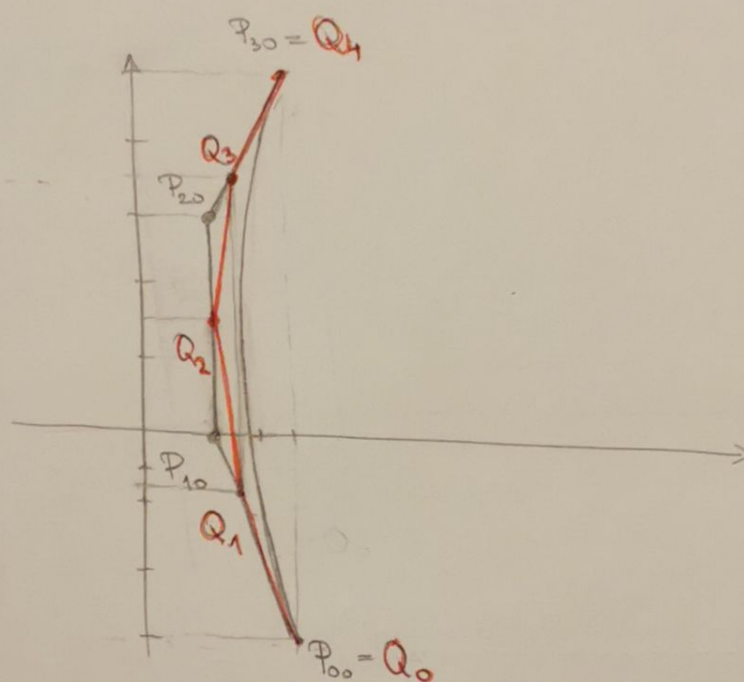
$$Q_0 = 0 + (1 - 0) P_0 = 0 + \frac{4}{4} P_{00} = P_{00} = (2, -3)$$

$$Q_1 = \frac{1}{3+1} P_0 + \left(1 - \frac{1}{3+1}\right) P_1 = \frac{1}{4} P_{00} + \frac{3}{4} P_{10} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2+3 \\ -3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = \frac{2}{4} P_1 + \left(1 - \frac{2}{4}\right) P_2 = \frac{2}{4} P_{10} + \frac{2}{4} P_{20} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \frac{3}{4} P_2 + \left(1 - \frac{3}{4}\right) P_3 = \frac{3}{4} P_{20} + \frac{1}{4} P_{30} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3+2 \\ 9+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q_4 = \frac{4}{3+1} P_3 + 0 = \frac{4}{4} P_{30} + 0 = P_{30} = (2, 5)$$



РАЦИОНАЛНЕ БЕЗИЈЕРОВЕ КРИВЕ

Деф. Рационална Безијеорова крива степена n са контролним тачкама $P_0, P_1, \dots, P_n$ и тежинама $w_0, w_1, \dots, w_n > 0$ је гласа параметризаација:

$$r_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t) P_i}{\sum_{i=0}^n w_i B_{i,n}(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad B_{i,n}(t) - \text{Бернштајнови полиноми}$$

17) Представим го круга $x = \sqrt{2} \cos \theta, y = \sqrt{2} \sin \theta, \theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ као рачуналну Безијерову криву.

$$k: \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \phi \\ y = \sqrt{2} \sin \phi \end{cases}, \phi \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad (*)$$

Уместо параметра ϕ уводимо параметар $t = \tan \frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi}}$

$$\text{ш. } t^2 = \frac{1 - \cos \phi}{1 + \cos \phi} \Leftrightarrow t^2 + t^2 \cos \phi = 1 - \cos \phi \Leftrightarrow \cos \phi (t^2 + 1) = 1 - t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\cos \phi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right] \quad (1) \quad \sin \phi = \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right)^2} = \frac{\sqrt{(1 + t^2)^2 - (1 - t^2)^2}}{1 + t^2} = \frac{\sqrt{(1 + t^2 + 1 - t^2)(1 + t^2 - 1 + t^2)}}{1 + t^2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 2t^2}}{1 + t^2} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\text{ш. } \left[\sin \phi = \frac{2t}{1 + t^2} \right] \quad (2)$$

$$(1), (2) \leadsto (*) \Rightarrow k: \begin{cases} x = \sqrt{2} \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y = \sqrt{2} \cdot \frac{2t}{1 + t^2} \end{cases}, t \in [0, 1] \quad \leftarrow \text{РАЦИОНАЛНА ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА КРУГА}$$

* ПОРЕДИМО ИНАКОВЕ РАЦИОНАЛНЕ ПАРАМЕТРИЗАЦИЈЕ КРУГА СА ИНАКОВЕМ ОПШТЕГ ОБЛИКА РАЦИОНАЛНЕ БЕЗИЈЕРОВЕ КРИВЕ СТЕПЕ НА 2.

$$\frac{\sqrt{2}(1 - t^2, 2t)}{1 + t^2} = \frac{\omega_0(1 - t)^2 P_0 + 2\omega_1(1 - t)t P_1 + \omega_2 t^2 P_2}{\omega_0(1 - t)^2 + 2\omega_1(1 - t)t + \omega_2 t^2}$$

$$1 + t^2 = \omega_0(1 - t)^2 + 2\omega_1(1 - t)t + \omega_2 t^2 = \omega_0 - 2\omega_0 t + \omega_0 t^2 + 2\omega_1 t - 2\omega_1 t^2 + \omega_2 t^2 = (\omega_0 - 2\omega_1 + \omega_2)t^2 + 2(\omega_1 - \omega_0)t + \omega_0$$

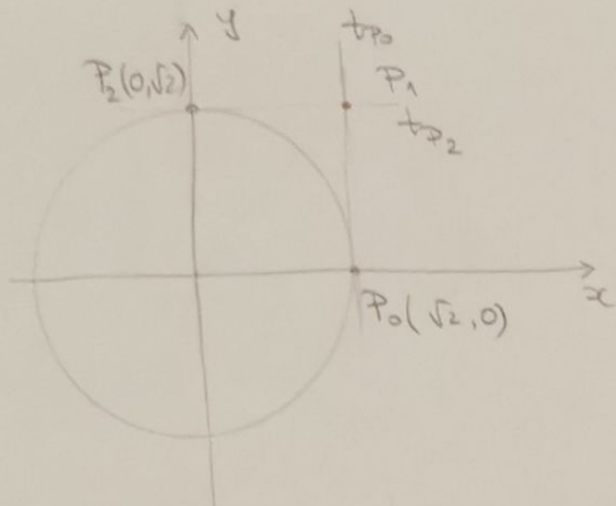
$$\begin{aligned} \text{ш. } t^2: & \quad 1 = \omega_0 - 2\omega_1 + \omega_2 \\ t: & \quad 0 = 2(\omega_1 - \omega_0) \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \omega_0 = 1} \\ 1: & \quad \boxed{1 = \omega_0} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} & \Rightarrow 1 = 1 - 2 + \omega_2 \Rightarrow \boxed{\omega_2 = 2} \end{aligned}$$

За $t \in [0, 1]$ одређимо контролне тачке:

$$t = 0: \quad P_0: x = \sqrt{2} \frac{1 - 0}{1 + 0} = \sqrt{2}, y = \sqrt{2} \frac{2 \cdot 0}{1 + 0} = 0 \Rightarrow \boxed{P_0(\sqrt{2}, 0)}$$

$$t = 1: \quad P_2: x = \sqrt{2} \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0, y = \sqrt{2} \frac{2 \cdot 1}{1 + 1} = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{P_2(0, \sqrt{2})}$$

Парку P_1 добијемо као средњу тачку тачака P_0 и P_2 .



$$\Rightarrow \boxed{P_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})}$$

$$P_0(\sqrt{2}, 0)$$

$$P_2(0, \sqrt{2})$$

После вращения $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, а у заг. се вращения $\phi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

После вращения $f = R_{0, -\frac{\pi}{4}}$

$$f: P_0, P_1, P_2 \rightarrow Q_0, Q_1, Q_2$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x' &= \cos \varphi x - \sin \varphi y \\ y' &= \sin \varphi x + \cos \varphi y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \varphi &= \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y \\ y' &= -\frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2} (x+y) \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-x+y) \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} Q_0: \quad x' &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} + 0) = 1 \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-\sqrt{2} + 0) = -1 \end{aligned}$$

$$\boxed{Q_0(1, -1)}$$

$$\begin{aligned} Q_1: \quad x' &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 2 \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{Q_1(2, 0)}$$

$$\begin{aligned} Q_2: \quad x' &= \frac{\sqrt{2}}{2} (0 + \sqrt{2}) = 1 \\ y' &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-0 + \sqrt{2}) = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{Q_2(1, 1)}$$

$$r_2(t) = \frac{\omega_0(1-t)^2 Q_0 + 2\omega_1(1-t)t Q_1 + \omega_2 t^2 Q_2}{1+t^2} = \frac{(1-t)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2(1-t)t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{1+t^2} \left((1-2t+t^2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (2t-2t^2) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\frac{1-2t+t^2+4t-4t^2+t^2}{1+t^2}, \frac{-1+2t-t^2+t^2}{1+t^2} \right)$$

$$\boxed{r_2(t) = \left(\frac{1+2t-t^2}{1+t^2}, \frac{-1+2t+t^2}{1+t^2} \right)}$$