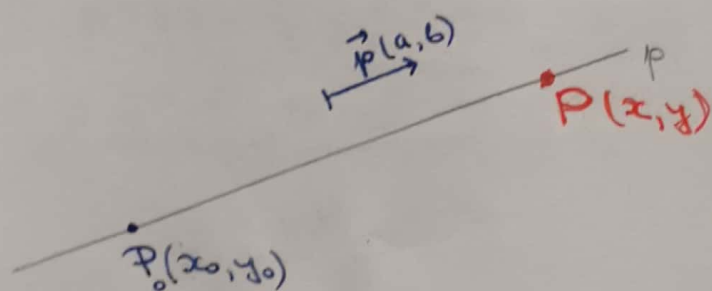


# АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

## ГЕОМЕТРИЈА РАВНИ

### ПРАВА У РАВНИ

Једначину  $y=kx+m$  НЕЋЕМО корисити, јер се у дан одлику не могу задати све праве (попут нпр. праве  $x=const$ ) и јер је тешко поштом уочити на димензију 3..



$P_0(x_0, y_0)$  - ТАЧКА СА ПРАВЕ  $p$

$\vec{p}(a, b)$  - ВЕКТОР ПРАВЦА

ПРАВЕ  $p$

(одно који вектор колинеаран са правом

$p$ , ил.  $\lambda \vec{p}$ )

$P(x, y)$  - ПРОИЗВОЉНА ТАЧКА ПРАВЕ  $p$

### ПАРАМЕТАРСКА Ј-НА ПРАВЕ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad x &= t a + x_0 \\ y &= t b + y_0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} t &= \frac{x - x_0}{a} \\ t &= \frac{y - y_0}{b} \end{aligned} \Rightarrow$$

### КАНОНСКА Ј-НА ПРАВЕ

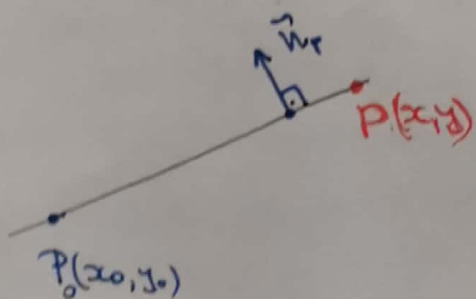
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} (=t)$$

$$\begin{aligned} \text{и} \quad b(x - x_0) &= a(y - y_0) \\ bx - bx_0 &= ay - ay_0 \end{aligned}$$

$$bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0 \quad \text{нека' је} \quad \begin{aligned} A &= b \\ B &= -a \\ C &= -bx_0 + ay_0 \end{aligned} \Rightarrow$$

### ИМПЛИЦИТНА Ј-НА ПРАВЕ

$$Ax + By + C = 0$$



$P(x, y)$   
 $P_0(x_0, y_0)$

$\vec{n}_p(A, B)$  - НОРМАЛАН ВЕКТОР НА ПРАВУ  $p$

$\vec{p}(a, b)$

$$\begin{aligned} A &= b \\ B &= -a \end{aligned} \Rightarrow \vec{n}_p(A, B) = (b, -a) \Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{n}_p = 0 \quad \text{и} \quad \vec{n}_p \perp \vec{p}$$

① Zadata je prava  $g: x = -t + 4, y = 2t - 7, t \in \mathbb{R}$ .

a) Određujući uslojnički odnosi prave  $g$ .

I način:  $g: \begin{cases} x = -t + 4 \\ y = 2t - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -x + 4 \\ t = \frac{y+7}{2} \end{cases} \Rightarrow -x+4 = \frac{y+7}{2} \Rightarrow -2x+8-y-7=0$   
 tj.  $-2x-y+1=0 \quad | \cdot (-1) |$   
 $\boxed{g: 2x+y-1=0}$

II način:  $g: \begin{cases} x = -t + 4 \\ y = 2t - 7 \end{cases} \quad \vec{r}_g = (-b, a) = (-2, -1) \sim \underline{\underline{(2, 1)}}$   
 $\vec{g}(-1, 2) \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ a & b \end{matrix}$   
 $\Rightarrow 2x + y + C = 0 \Rightarrow 2 \cdot 4 - 7 + C = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C = -1}}$   
 UBAČIMO koord. tačke  $Q_0$ , jer  $Q_0 \in g$  da bi  
 $Q_0(4, -7)$  godinu bježno sa. jedna  $C$

$\Rightarrow \boxed{g: 2x+y-1=0}$

β) Određujući uslojnički odnosi prave  $r$  koja sadrži tačku  $R(3, 7)$  i paralelna je sa  $g$ .

I način:  $\vec{n}_g(2, 1) \quad \left. \begin{matrix} \vec{n}_g(2, 1) \\ g \parallel r \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{n}_g \perp r \quad \text{tj.} \quad \underline{\underline{\vec{n}_r = \vec{n}_g = (2, 1)}}$

$r: 2x + y + C = 0 \quad \left. \begin{matrix} r: 2x + y + C = 0 \\ R(3, 7) \in r \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 3 + 7 + C = 0 \Rightarrow \underline{\underline{C = -13}}$

$\Rightarrow \boxed{r: 2x+y-13=0}$

II način:  $\vec{g}(-1, 2) \quad \left. \begin{matrix} \vec{g}(-1, 2) \\ r \parallel g \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{r} = \vec{g} = (-1, 2)}}$

$\underline{\underline{R(3, 7) \in r}}$

$\Rightarrow r: \begin{cases} x = -t + 5 \\ y = 2t + 7 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} t = 3-x \\ t = \frac{y-7}{2} \end{cases} \Rightarrow 3-x = \frac{y-7}{2} \Rightarrow 6-2x-y+7=0 \quad \text{tj.} \quad -2x-y+13=0 \quad | \cdot (-1) |$   
 $\Rightarrow \boxed{r: 2x+y-13=0}$

② Опређујте јтту нормале  $n$  из тачке  $A(1,7)$  на праву  $p$  ако је:

а)  $p: x = 2t + 4$   
 $y = 3t - 5, t \in \mathbb{R}$

$$\vec{p} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{n}_p \perp \vec{p}} \vec{n}_p \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P_0(4, -5)$$

$$n: n \ni A(1,7)$$

$$n \perp p \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_p(-3, 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n: x = -3t + 1 \\ y = 2t + 7 \end{cases}$$

д)  $p: 4x - \frac{2}{3}y + 7 = 0 \leftarrow$  условљива јтта праве  $\Rightarrow \vec{n}_p(4, -\frac{2}{3})$

$$n: n \perp p \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_p(4, -\frac{2}{3})$$

$$n \ni A(1,7)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n: x = 4t + 1 \\ y = -\frac{2}{3}t + 7 \end{cases}$$

③ Нека је  $A(2,3), B(-1,4)$ .

а) Опређујте параметарску јтту праве  $AB$ .

$p = AB$ :  $\vec{AB}$  је вектор правца праве

$$A, B \in p$$

$$\vec{AB}(-1-2, 4-3) \Rightarrow \vec{AB}(-3, 1)$$

Координате тачке  $A$  (који смо узели и координате тачке  $B$ )

$$AB: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{1} (=t)$$

д) Условајте да ли тачка  $C(14, -1)$  припада полуправој  $[AB)$ .

\* ПОЛУПРАВА  $[AB)$  са почетком у тачки  $A$  која садржи тачку  $B$  представљена је параметарском јттом за  $t \geq 0$ , а њој комплементарна полуправа за  $t < 0$ .

$$AB: x = -3t + 2$$

$$y = t + 3$$

$$14 = -3t + 2$$

$$-1 = t + 3$$

$$\Rightarrow t = -4$$

$$\Rightarrow t = -4$$

Како је сачињен САОПАСАН,  $C \in AB$  правој

убацимо  $C(14, -1)$

$$\boxed{t = -4} \Rightarrow C \notin [AB)$$

4) Укажувајќи го м параметар  $D(1, \frac{10}{3})$  спроведувајќи го  $[AB]$  и у кој оттој е ген.

$$A(x_A, y_A)$$

$$B(x_B, y_B)$$

$$\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$$

$$\boxed{AB: \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$$

$$D(x_D, y_D) \in AB$$

$$\vec{AD} = (x_D - x_A, y_D - y_A) = (t_D(x_B - x_A), t_D(y_B - y_A))$$

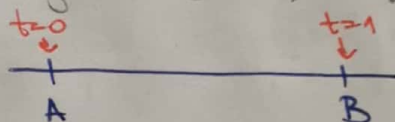
$\vec{AD}, \vec{AB}$  су коллинеарни

$$|\vec{AD}| = \sqrt{t_D^2(x_B - x_A)^2 + t_D^2(y_B - y_A)^2} = t_D \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = t_D \cdot |\vec{AB}|$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{AD}|}{|\vec{AB}|} = t_D$$

Прозвучава параметар  $D$  спроведувајќи  $AB$  за параметар  $t_D$   $\Rightarrow t_D = \frac{|\vec{AD}|}{|\vec{AB}|}$ .

$$* t_D \in [0, 1] \Rightarrow D \in [AB]$$



$$AB: \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t + 3 \end{cases}$$

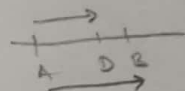
Дали  $D \in AB$  спроведувајќи  $D(1, \frac{10}{3})$

$$\begin{cases} 1 = -3t + 2 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \\ \frac{10}{3} = t + 3 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Системот е} \\ \text{согласен} \Rightarrow \\ D \in AB \text{ спроведувајќи} \end{array} \right.$$

$$t_D = \frac{1}{3} \in [0, 1] \Rightarrow D \in [AB]$$

$\vec{AD} = t_D \vec{AB}$   $\vec{AD} = \frac{1}{3} \vec{AB}$

$$D \in [AB] \Rightarrow \vec{AD} + \vec{DB} = \vec{AB} \Rightarrow \vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{AB} - t_D \vec{AB} = (1 - t_D) \vec{AB} = (1 - \frac{1}{3}) \vec{AB} = \frac{2}{3} \vec{AB}$$

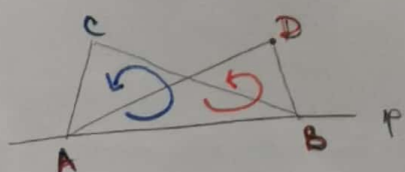


$$\vec{AD} = \frac{1}{3} \vec{AB}$$

$$|\vec{AD}| : |\vec{DB}| = \frac{1}{3} |\vec{AB}| : \frac{2}{3} |\vec{AB}| = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 1 : 2$$

4) Укажувајќи го м параметар  $C(1, 1)$  и  $D(-7, 11)$  спроведувајќи нив вој компаративни одреденост  $AB$ ,  $A(2, -2)$ ,  $B(1, 3)$ .

I начин:  $C, D \in$  нивој компаративни  $\Leftrightarrow$  одреденост  $\Delta ABC, \Delta ABD$  не е нивна.



$$\begin{aligned} \vec{AC} &= (-1, 3) \\ \vec{AD} &= (-9, 13) \\ \vec{AB} &= (-1, 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{ABC} &= \begin{vmatrix} \vec{AB} \rightarrow & -1 & 5 \\ \vec{AC} \rightarrow & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 5 = 2 > 0 \\ D_{ABD} &= \begin{vmatrix} \vec{AB} \rightarrow & -1 & 5 \\ \vec{AD} \rightarrow & -9 & 13 \end{vmatrix} = -13 + 45 = 32 > 0 \end{aligned} \left\{ \Rightarrow \text{не е нивна} \right.$$

II начин:  $\vec{p} = \vec{AB}(-1, 5) \Rightarrow \vec{n}_p = (5, 1)$

$$p: 5x + y - 8 = 0$$

$$C(1, 1) \in AB \text{ спроведувајќи}$$

$$D(-7, 11) \in AB \text{ спроведувајќи}$$

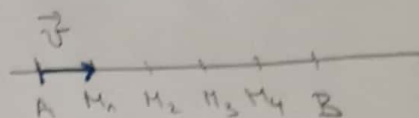
$$p \cdot AB: 5x + y - 8 = 0 \quad A \in p \text{ т. } 5 \cdot 2 - 2 - 8 = 0 \Rightarrow A \in p$$

$$5 \cdot 1 + 1 - 8 = -2 < 0 \Rightarrow C \notin AB \quad 5 \cdot (-7) + 11 - 8 = -32 < 0 \Rightarrow D \notin AB$$

5) Ako je  $A(1,2), B(3,7)$ , odredi koordinatu tačke koja je na srednjem preseku  $AB$  na dve jednakih delova.

$$\vec{AB}(2,5)$$

$$AB: \begin{cases} x=2t+1 \\ y=5t+2 \end{cases}$$



$$\vec{v} = \frac{1}{5} \vec{AB} = \left(\frac{2}{5}, 1\right)$$

I način:

$$\vec{AM}_1 = \vec{v} = \left(\frac{2}{5}, 1\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = \frac{2}{5} & x_1 = \frac{7}{5} \\ y_1 - 2 = 1 & y_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow M_1\left(\frac{7}{5}, 3\right)$$

$$\vec{AM}_2 = 2\vec{v} = 2\left(\frac{2}{5}, 1\right) = \left(\frac{4}{5}, 2\right) \Rightarrow \begin{cases} x_2 - 1 = \frac{4}{5} & x_2 = \frac{9}{5} \\ y_2 - 2 = 2 & y_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow M_2\left(\frac{9}{5}, 4\right)$$

II način

$$\vec{AM}_3 = \vec{AM}_2 + \vec{v} = \left(\frac{4}{5}, 2\right) + \left(\frac{2}{5}, 1\right) = \left(\frac{6}{5}, 3\right) \Rightarrow \begin{cases} x_3 - 1 = \frac{6}{5} & x_3 = \frac{11}{5} \\ y_3 - 2 = 3 & y_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow M_3\left(\frac{11}{5}, 5\right)$$

$$\vec{AM}_4 = \vec{AM}_3 + \vec{v} = \left(\frac{6}{5}, 3\right) + \left(\frac{2}{5}, 1\right) = \left(\frac{8}{5}, 4\right) \Rightarrow \begin{cases} x_4 - 1 = \frac{8}{5} & x_4 = \frac{13}{5} \\ y_4 - 2 = 4 & y_4 = 6 \end{cases} \Rightarrow M_4\left(\frac{13}{5}, 6\right)$$

III način

$$\frac{|\vec{AM}_1|}{|\vec{AB}|} = t_{M_1} = \frac{1}{5}$$

$$AB \ni M_1: \begin{cases} x_1 = 2 \cdot \frac{1}{5} + 1 = \frac{7}{5} \\ y_1 = 5 \cdot \frac{1}{5} + 2 = 3 \end{cases}$$

$$M_1\left(\frac{7}{5}, 3\right)$$

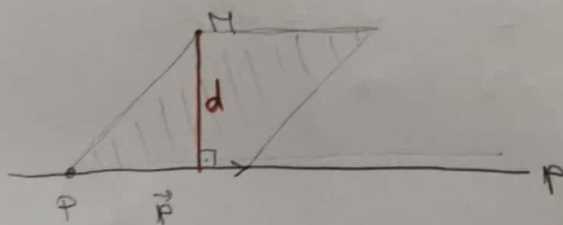
u analogno za ostale tačke

6) Izračunajte rastojanje tačke  $M(1, -3)$  od prave

a)  $2x - 3y + 1 = 0$

b) Prave p koji je vektor pravca  $\vec{p} = (1, -2)$ , a tačka  $P(1, 0)$ .

РАСТОЈАЊЕ ТАЧКЕ ОД ПРАВЕ



$$P_{\square} = a \cdot h = |\vec{p}| \cdot d$$

$$\parallel \vec{p} \times \vec{PM} \parallel$$

Def: Rastojanje tačke M od prave p zadate svojom tačkom P i vektorom pravca  $\vec{p}$  dato je izrazom  $d = d(M, p) = \frac{\|\vec{p} \times \vec{PM}\|}{\|\vec{p}\|}$

Ako je prava p u ravni gde u implicitnom obliku  $p: Ax + By + C = 0$ , rastojanje tačke  $M(x_0, y_0)$  od p gde je formulom  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

### БЕЗА ИЗМЕНЉИВ ФОРМУЛА:

$$p: Ax + By + C = 0 \Rightarrow \vec{n}_p(A, B) \Rightarrow \vec{p}(-B, A)$$

$$P \in p, \text{ кад } y_0 = 0 \Rightarrow \underline{P(-\frac{C}{A}, 0)}$$

$$\Rightarrow \vec{PM} = (x_0 + \frac{C}{A}, y_0)$$

$$\vec{PM} \times \vec{p} = (x_0 + \frac{C}{A}, y_0, 0) \times (B, -A, 0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_0 + \frac{C}{A} & y_0 & 0 \\ B & -A & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_3 (A(x_0 + \frac{C}{A}) - By_0)$$

Векторски производ је дефинисан за векторе из  $\mathbb{R}^3$ , па  
глаголем претку координату

$$\vec{PM} \times \vec{p} = -(Ax_0 + By_0 + C) \vec{e}_3$$

$$\left. \begin{aligned} \|\vec{PM} \times \vec{p}\| &= \sqrt{0^2 + 0^2 + (Ax_0 + By_0 + C)^2} = |Ax_0 + By_0 + C| \\ \|\vec{p}\| &= \sqrt{B^2 + A^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$d = \frac{\|\vec{p} \times \vec{PM}\|}{\|\vec{p}\|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

⑥ a)  $p: 2x - 3y + 1 = 0$ ,  $M(1, -3)$

$$d(M, p) = \frac{|2 \cdot 1 - 3(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|2 + 9 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$$

д)  $P(1, 0)$   $\vec{p}(1, -2)$

$$\vec{PM}(0, -3)$$

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{1 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}(1, -2, 0) \\ \vec{PM}(0, -3, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{p} \times \vec{PM} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{e}_3$$

$$\|\vec{p} \times \vec{PM}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-3)^2} = 3$$

$$d = \frac{\|\vec{p} \times \vec{PM}\|}{\|\vec{p}\|} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

# ПРЕСЕК ПРАВИХ ЗАДАТИХ ПАРАМЕТАРСКИ

$p: P, \vec{p}$   
 $g: Q, \vec{g}$

Произвольне  
 тачке

$$M = P + t\vec{p}$$

$$N = Q + s\vec{g}$$

$$t, s \in \mathbb{R}$$

$$M \in p$$

$$N \in g$$

$$p \cap g \neq \emptyset \Leftrightarrow M = N \Leftrightarrow \underline{t\vec{p} - s\vec{g} = Q - P = \vec{PQ}}$$

$\begin{matrix} P+t\vec{p} & Q+s\vec{g} \end{matrix}$

$$\boxed{t\vec{p} - s\vec{g} = \vec{PQ}} \quad (*) \quad \left| \begin{array}{l} \times \vec{p} \\ \times \vec{g} \end{array} \right.$$

$$t\vec{p} \times \vec{p} - s\vec{g} \times \vec{p} = \vec{PQ} \times \vec{p}$$

$$s\vec{p} \times \vec{g} = \vec{PQ} \times \vec{p}$$

$$s D(\vec{p}, \vec{g}) = D(\vec{PQ}, \vec{p})$$

$$t\vec{p} \times \vec{g} - s\vec{g} \times \vec{g} = \vec{PQ} \times \vec{g}$$

$$t\vec{p} \times \vec{g} = \vec{PQ} \times \vec{g}$$

$$\underline{t D(\vec{p}, \vec{g}) = D(\vec{PQ}, \vec{g})}$$

•  $D(\vec{p}, \vec{g}) \neq 0$     њ.  $\vec{p} \times \vec{g} \neq \vec{0}$     њ.  $\vec{p}, \vec{g}$  нису колинеарни

$\exists!$  пресека тачке  $N(s) = M(t)$  за

$$s = \frac{D(\vec{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{g})}, \text{ односно } t = \frac{D(\vec{PQ}, \vec{g})}{D(\vec{p}, \vec{g})}$$

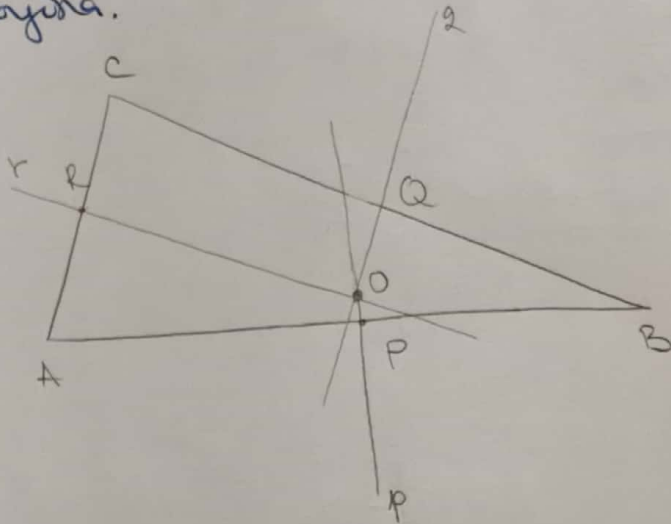
•  $D(\vec{p}, \vec{g}) = 0$   $\Rightarrow \vec{p}, \vec{g}$  су колинеарни

\*  $D(\vec{PQ}, \vec{g}) = 0$ ,  $p, g$  имају исти правац  
 и тачке  $P \in g \Rightarrow$

поклапају се њ.  $p = g$

\*  $D(\vec{PQ}, \vec{g}) \neq 0$ , ипак имају исти правац  
 али тачке  $P \notin g$  па су  
 ипак паралелне њ.  $p \parallel g$

7) Определить уравнение и координаты ортоцентра треугольника  $ABC$  если  $A(1,2), B(4,3), C(6,0)$  как и координаты медианного треугольника.



$$P = \frac{A+B}{2}$$

$$P = S(AB) \Rightarrow P\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$Q = S(BC) \Rightarrow Q\left(5, \frac{3}{2}\right)$$

$$R = S(AC) \Rightarrow R\left(\frac{7}{2}, 1\right)$$

$$\{O\} = p \cap q \cap r$$

$$p: \vec{p} \perp \vec{AB}, P\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\vec{AB}(3,1) \Rightarrow \vec{p}(1,-3)$$

$$\Rightarrow p: \begin{cases} x = t + \frac{5}{2} \\ y = -3t + \frac{5}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$q: \vec{q} \perp \vec{BC}, Q\left(5, \frac{3}{2}\right)$$

$$\vec{BC}(2,-3) \Rightarrow \vec{q}(-3,-2)$$

$$\Rightarrow q: \begin{cases} x = -3s + 5 \\ y = -2s + \frac{3}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\{O\} = p \cap q$$

$$\vec{PQ}\left(\frac{5}{2}, -1\right)$$

$$\Delta = \frac{D(\vec{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{15}{2} + 1}{-2 - 9} = \frac{-\frac{13}{2}}{-11} = \frac{13}{22}$$

$$\Delta = \frac{13}{22} \xrightarrow{(2)} q: \begin{cases} x = -3 \cdot \frac{13}{22} + 5 = \frac{-39 + 110}{22} = \frac{71}{22} \\ y = -2 \cdot \frac{13}{22} + \frac{3}{2} = \frac{-26 + 33}{22} = \frac{7}{22} \end{cases}$$

$$\Rightarrow O\left(\frac{71}{22}, \frac{7}{22}\right)$$

$$\vec{CO} = \left(\frac{71}{22} - 6, \frac{7}{22}\right) = \left(\frac{71 - 132}{22}, \frac{7}{22}\right) = \left(-\frac{61}{22}, \frac{7}{22}\right)$$

$$r = \|\vec{CO}\| = \sqrt{\left(-\frac{61}{22}\right)^2 + \left(\frac{7}{22}\right)^2} = \sqrt{\frac{61^2 + 7^2}{22^2}} = \frac{\sqrt{3721 + 49}}{22} = \frac{\sqrt{3770}}{22}$$

Координаты медианного треугольника  $T$  в треугольнике  $ABC$ :

I способ:  $\vec{AT} = \frac{2}{3} \vec{AQ}$  (где  $Q = S(BC) \Rightarrow AQ$  — медиана  $\triangle ABC$  из вершины  $A$ )

$$\vec{AT} = \frac{2}{3}(4, -\frac{1}{2}) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$T(x_T, y_T)$$

$$(x_T - 1, y_T - 2) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow$$

$$x_T - 1 = \frac{8}{3} \Rightarrow x_T = \frac{11}{3}$$

$$y_T - 2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow y_T = \frac{5}{3}$$

$$T\left(\frac{11}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

II НАЧИН:  $\{T\} = CP \cap AQ$

$p=AQ$ :  $\vec{p}(4, -\frac{1}{2})$

$p$ :  $x = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  (1)

$q=CP$ :  $\vec{q}(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$   
 $\vec{AC}(5, 2)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{p} \\ \vec{q} \end{array} \right\} \Rightarrow t = \frac{D(\vec{AC}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{25}{2} - 7}{10 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{37}{4}} = \frac{11}{37}$$

$t = \frac{2}{3} \xrightarrow{(1)} p \Rightarrow T$ :  $x = 4 \cdot \frac{2}{3} + 1 = \frac{11}{3}$   
 $y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 2 = \frac{5}{3}$

$T(\frac{11}{3}, \frac{5}{3})$

⑧ Определить центроид  $T$ , ортоцентр  $H$  и центр описанной  $O$  и вписанной круга  $S$  у  $\triangle ABC$ ,  $A(1,4)$ ,  $B(3,3)$ ,  $C(1,2)$ . Определить барцентрические координаты этих точек.

### T - ЦЕНТРОИД

I НАЧИН:  $\vec{AT} = \frac{2}{3} \vec{AA_1}$

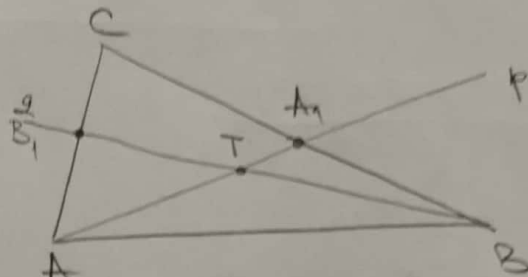
$A_1 = (\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

$T(x_T, y_T)$   $\vec{AT} = \frac{2}{3} \vec{AA_1} = \frac{2}{3} (\frac{3}{2} - 1, \frac{5}{2} - 4) = \frac{2}{3} (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) = (\frac{1}{3}, -1)$

$\vec{AT}(x_T + 1, y_T - 4)$   $(x_T + 1, y_T - 4) = (\frac{1}{3}, -1)$

$x_T + 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_T = -\frac{2}{3}$   
 $y_T - 4 = -1 \Rightarrow y_T = 3$

$T(\frac{2}{3}, 3)$



II НАЧИН:

$p$ :  $\vec{p} = \vec{AA_1}$ ,  $A \in p$   
 $\vec{p} = \vec{AA_1} = (\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p: x = \frac{5}{2}t - 1 \\ y = -\frac{3}{2}t + 4 \end{array} \right. (1)$

$q$ :  $\vec{q} = \vec{BB_1}$ ,  $B \in q$

$B(0,3) \Rightarrow \vec{q} = \vec{BB_1} = (-2, 0)$

$\vec{AB}(3, -1)$

$\Rightarrow t = \frac{D(\vec{AB}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$   $t = \frac{2}{3} \xrightarrow{(1)} p$

$\Rightarrow T$ :  $x = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{2}{3}$   
 $y = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} + 4 = 3$

$T(\frac{2}{3}, 3)$

БАРИЦЕНТРИЧНЕ КООРДИНАТЕ ТАЧКЕ  $M(m_1:m_2:m_3)$  У ОДНОСУ НА ТАЧКЕ  $A_1, A_2, A_3$  СУ:

$$(m_1:m_2:m_3) = (P(A_2, A_3, M) : P(A_3, A_1, M) : P(A_1, A_2, M))$$

$$m_A = D_{\Delta TBC} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

$$\vec{TB}(\frac{1}{3}, 0)$$

$$\vec{TC}(\frac{1}{3}, -1)$$

$$\vec{TA}(-\frac{5}{3}, 1)$$

$$m_B = D_{\Delta TCA} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{5}{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$m_C = D_{\Delta TAB} = \begin{vmatrix} -\frac{5}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$$

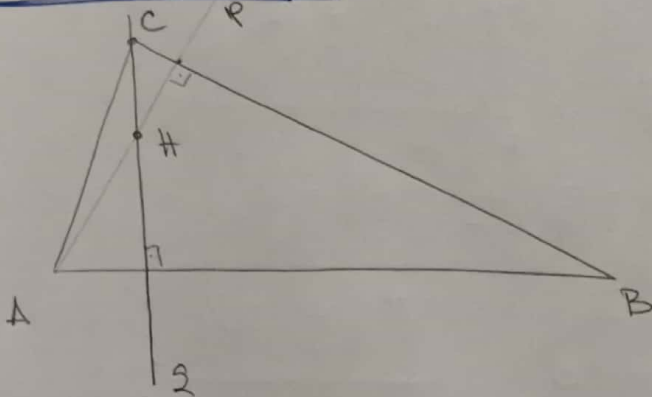
$$\Rightarrow T(m_A:m_B:m_C) = (-\frac{1}{3} : -\frac{4}{3} : -\frac{4}{3}) \text{ или } T(1:1:1)$$

ХОМОГЕНЕ БАРИЦЕНТРИЧНЕ КООРДИНАТЕ

НЕХОМОГЕНЕ:  $m_A + m_B + m_C = 1 + 1 + 1 = 3$   
 $\Rightarrow T(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$$T(\frac{m_A}{m_A+m_B+m_C}, \frac{m_B}{m_A+m_B+m_C}, \frac{m_C}{m_A+m_B+m_C})$$

## H - ОРТОЦЕНТАР



$$p: \vec{p} \perp \vec{BC}, p \ni A(-1, 4)$$

$$\vec{BC}(-1, -1) \Rightarrow \vec{p}(-1, 1)$$

$$\boxed{p: \begin{cases} x = -t - 1 \\ y = t + 4 \end{cases}} \quad (1)$$

$$q: \vec{q} \perp \vec{AB}, q \ni C(1, 2)$$

$$\vec{AB}(3, -1) \Rightarrow \vec{q}(-1, -3)$$

$$\vec{AC}(2, -2)$$

$$\Rightarrow t = \frac{D(\vec{AC}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-6-2}{3+1} = \frac{-8}{4} = -2 \quad t \text{ из (1)}$$

$$H: \begin{cases} x = -(-2) - 1 = 1 \\ y = -2 + 4 = 2 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{H(1, 2) = C}} \Rightarrow \text{ТРОУГАО } \Delta ABC \text{ ЈЕ ПРАВОУГАО}$$

$$m_A = D_{\Delta HBC} = 0$$

$$m_B = D_{\Delta HCA} = 0$$

$$m_C = D_{\Delta HAB} = D_{\Delta CAB} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4$$

$$\Rightarrow H(0:0:-4) \text{ или } H(0:0:1)$$

ЦЕНТАР ОПИСАНОГ КРУГА O - код правоуглог троугла  
 O је средиште хипотенузе

$\triangle ABC$  правоугли са правим углом код тачке C

$$\Rightarrow O = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$m_A = D_{OBC} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = -\frac{9}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

$$\vec{OB} \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{OC} \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\vec{OA} \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$m_B = D_{OCA} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

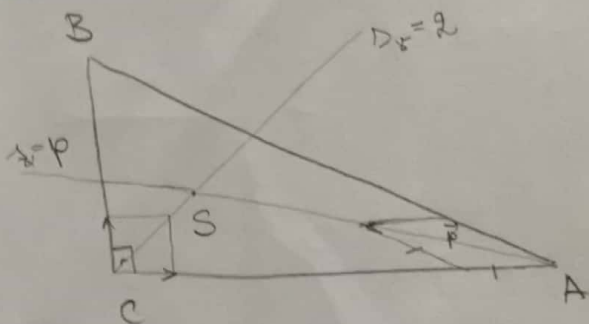
$$m_C = D_{OAB} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow O(-2; -2; 0) \text{ и } O(1; 1; 0)$$

$$\underline{O(1; 1; 0)}$$

КОМПОНЕНТЕ БАРИЦЕНТА.  
 КООР.

## S-ЦЕНТАР УПИСАНОГ КРУГА



$$p: \vec{p} = \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} + \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{(3, -1)}{\sqrt{9+1}} + \frac{(2, -2)}{\sqrt{4+4}} = \frac{(3, -1)}{\sqrt{10}} + \frac{(2, -2)}{2\sqrt{2}}$$

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3 + \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5})$$

$p \in A$

$$g: \vec{g} = \frac{\vec{CA}}{\|\vec{CA}\|} + \frac{\vec{CB}}{\|\vec{CB}\|} = \frac{(-2, 2)}{\sqrt{4+4}} + \frac{(1, 1)}{\sqrt{1+1}} = \frac{(-2, 2)}{2\sqrt{2}} + \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} = (0, \sqrt{2})$$

$$g \in C \quad \begin{aligned} \vec{CA} &= -\vec{AC} = -(2, -2) = (-2, 2) \\ \vec{CB} &= (1, 1) \end{aligned}$$

$$\boxed{g: \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= \sqrt{2} \lambda + 2 \end{aligned}} \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{D(\vec{AC}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{g})} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10}} & \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{10}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{10}} & \frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{10}} \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{10}}(-1-\sqrt{5}+3+\sqrt{5})}{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{10}}}{\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}} =$$

$$\lambda = \frac{4}{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})} = \frac{4}{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2 \cdot (9-5)} = \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2} \quad \lambda \xrightarrow{(1)} g$$

$$S: \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2} + 2 = 3 - \sqrt{5} + 2 = 5 - \sqrt{5} \end{aligned} \Rightarrow \underline{\underline{S(1, 5-\sqrt{5})}}$$

• 13. zadatak ⑤ znano je  $S$  yestup nace dvarake  
 $A(a), B(b), C(c)$  tje je  $a = \|\vec{BC}\|$ ,  $b = \|\vec{AC}\|$ ,  $c = \|\vec{BA}\|$

$$a = \|\vec{BC}\| = \|(-1, -1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$b = \|\vec{AC}\| = \|(2, -2)\| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

$$c = \|\vec{AB}\| = \|(3, -1)\| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \sqrt{2} \\ b = 2\sqrt{2} \\ c = \sqrt{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{S(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; \sqrt{10})}{(1: 2: \sqrt{5})} = \underline{\underline{\text{хомогене бар. коор.}}}$$

⑨ Определити пресек правих  $p$  и  $q$  које су заједно  
 датих и бездиректних правих:

a)  $P(3, 1), \vec{p}(1, 0)$   
 $Q(2, 3), \vec{q}(1, 1)$

$$p \cap q = \{M\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p: x = t + 3 \\ y = 1 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\vec{PQ}(-1, 2)$$

$$\Rightarrow t = \frac{D(\vec{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1-2}{1} = -3$$

$$\underline{t = -3} \xrightarrow{(1)} p$$

$$M: \begin{cases} x = -3 + 3 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \} \underline{\underline{M(0, 1)}}$$

б)  $P(3, 1), \vec{p}(1, 0)$   
 $Q(2, 3), \vec{q}(-2, 0)$

$$D(\vec{p}, \vec{q}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$D(\vec{PQ}, \vec{p}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\vec{p}, \vec{q} \text{ су колинеарни, } p \cap q = \emptyset \Rightarrow \underline{\underline{p \parallel q}}$$

в)  $P(3, 1), \vec{p}(1, -2)$   
 $Q(2, 3), \vec{q}(-2, 4)$

$$D(\vec{p}, \vec{q}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$D(\vec{PQ}, \vec{p}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{p}, \vec{q} \text{ су колинеарни}$$

$$p \cap q = \{p\}$$

$$\left. \begin{array}{l} D(\vec{p}, \vec{q}) = 0 \\ D(\vec{PQ}, \vec{p}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{p = q}}$$