

АФИННО ПРЕСЛИКАВАЊЕ

ДЕФ. Нека је $\bar{f}: V \rightarrow V$ ЛИНЕАРНО ПРЕСЛИКАВАЊЕ ВЕКТОРСКОГ ПРОСТОРА КОЈИ ЈЕ ПРИДРУЖЕН ПРОСТОРУ ТАЧАКА E . АФИННО ПРЕСЛИКАВАЊЕ $f: E \rightarrow E$ ЈЕ ПРЕСЛИКАВАЊЕ ТАЧАКА КОЈЕ ЈЕ ИНДУКОВАНО ПРЕСЛИКАВАЊЕМ $\bar{f}$ ВЕКТОРА У СМИСЛУ ДА ЈЕ

$$f(M) = M', f(N) = N' \iff \bar{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$$

ЛЕМА: Свако афинно пресликавање f , у фиксираном реперу O_e , има облик:

$$x' = Ax + b,$$

$x = [M]_{O_e}$ - координате оригиналне тачке

$x' = [f(M)]_{O_e}$ - координате њене слике

$A = [\bar{f}]_e$ - матрица линеарног пресликавања $\bar{f}$ у бази e

$b = [f(O)]_{O_e}$ - координате слике координатног почетка

ОСОВИНЕ АФИННИХ ПРЕСЛИКАВАЊА РАВНИ:

(1) ПРЕСЛИКАВАЈУ ПРАВЕ У ПРАВЕ

(2) ЧУВАЈУ РАЗМЕРУ КОЛИНЕАРНИХ ДУЖИ

(3) ЧУВАЈУ ПАРАЛЕЛНОСТ ПРАВНИХ

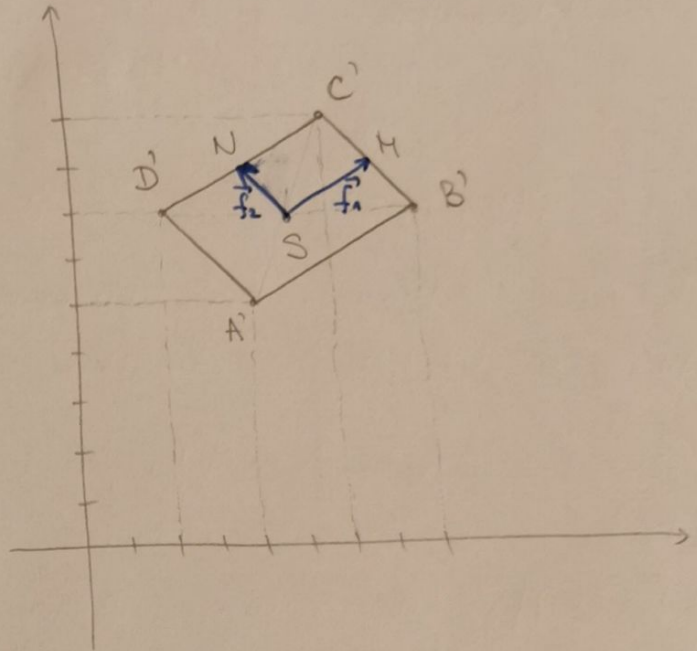
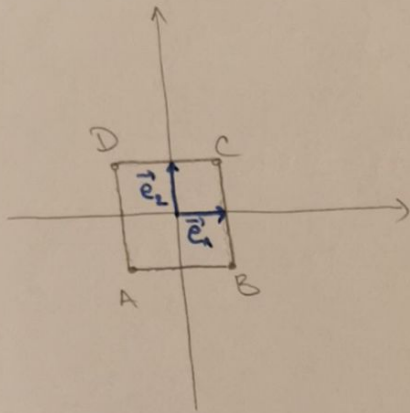
(4) $\frac{P(\phi')}{P(\phi)} = |\det A|$, $P(\phi')$ - ПОВРШИНА СЛИКЕ, $P(\phi)$ - ПОВРШИНА ОРИГИНАЛА

(5) ЧУВАЈУ ЦЕНТАР СИСТЕМА ТАЧАКА И БАРИЦЕНТРИЧНЕ КООРДИНАТЕ

(6) ПРЕСЛИКАВАЊА ЗА КОЈА ЈЕ $\det A > 0$ ЧУВАЈУ ОРИЈЕНТАЦИЈУ, А ЗА КОЈА ЈЕ $\det A < 0$ МЕНЈАЈУ ОРИЈЕНТАЦИЈУ РАВНИ

4) Дате су тачке $A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$; $A'(4,5)$, $B'(8,7)$, $C'(6,9)$, $D'(2,7)$.

a) Одредити је афини пресликавањ која квадрант $ABCD$ пресликава у паралелограм $A'B'C'D'$.



$$S = S(A'C') = S(B'D')$$

$$\Rightarrow S = \frac{(8,7) + (2,7)}{2} = (5,7)$$

$$M = S(B'C') = \frac{(8,7) + (6,9)}{2} = (7,8)$$

$$N = S(C'D') = (4,8)$$

$$\vec{f}_1 = \vec{SM} = (2,1)$$

$$\vec{f}_2 = \vec{SN} = (-1,1)$$

$$\vec{OS} = (5,7)$$

МАТРИЦА
ЛИНЕАРНОГ
ДЕЛА

ВЕКТОР
ТРАНСЛАЦИЈЕ

$$\left. \begin{array}{l} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $[\vec{f}_1]_{oe}$ $[\vec{f}_2]_{oe}$ $[S]_{oe}$

У рачунарству се увек користи ово матрицу лин. дела и вектора транс-
лације афини пресликавања представља матрицом

$$A_b := \left(\begin{array}{cc|c} \text{МАТРИЦА} & & \text{ВЕКТОР} \\ \text{ЛИНЕАРНОГ} & & \text{ТРАНСЛА-} \\ \text{ДЕЛА} & & \text{ЦИЈЕ} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

б) Израчунајте довршну паралелограма, корисајте и генерична-
нну матрицу довршност пресликавања и довршну квадранта

$$P(\phi') = |\det A| \cdot P(\phi)$$

$$P(\phi') = |3| \cdot 4 = 12$$

$$P(\phi) = P_{\square_2} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$|\det A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$$

5) Znao je afino preslikavanje formula

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Odredi f-je inverzni preslikavanja.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 3$$

$$A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{A^{-1} A}_{\operatorname{Id}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + A^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

6) Odredi f-je afino preslikavanja koje mapira OAB u preslikava u mapira O'A'B', ako je O(0,0), A(1,0), B(0,1) u O'(5,-4), A'(7,-8), B'(4,1)

$$O(0,0) \xrightarrow{f} O'(5,-4)$$

$$A(1,0) \xrightarrow{f} A'(7,-8)$$

$$B(0,1) \xrightarrow{f} B'(4,1)$$

$$\vec{f}_1 = \vec{OA'} = (2, -4)$$

$$\vec{f}_2 = \vec{OB'} = (-1, 5)$$

$$\vec{OO'} = (5, -4)$$

$$f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ [\vec{f}_1]_{oe} \quad [\vec{f}_2]_{oe}}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}}_{[O']_{oe}}$$

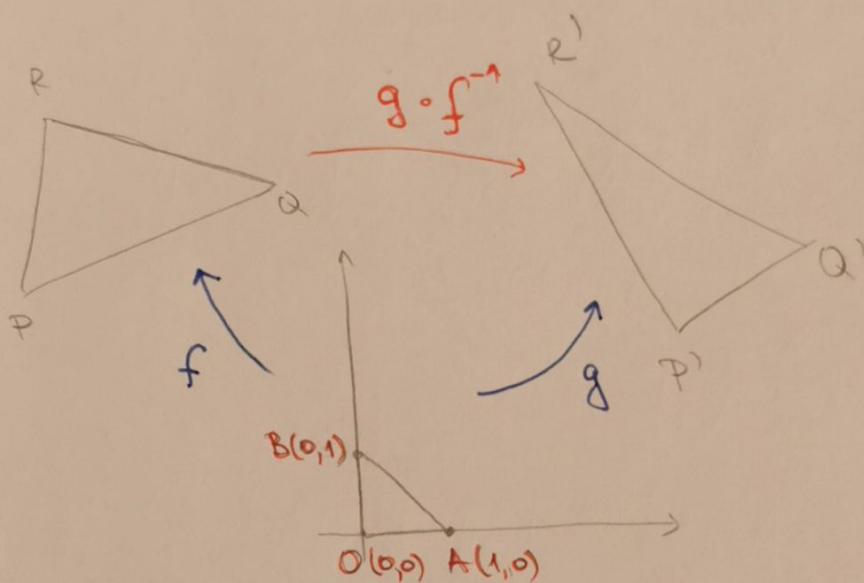
a) Da li je preslikavanje ruzba orijentacije?

$$\det C = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6 > 0 \Rightarrow \text{YJBA ORIJENTACIJA}$$

7) Izračunaj površinu $\Delta O'A'B'$ (znajući da je $P(\Delta OAB) = \frac{1}{2}$ i znajući determinantu preslikavanja.

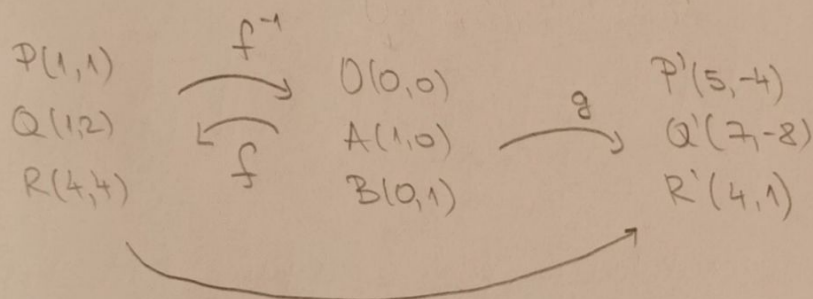
$$P_{\Delta O'A'B'} = |\det C| \cdot P_{\Delta OAB} = |6| \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = \underline{\underline{3}}$$

7) Определите формулы аффинной преобразования, которые ΔPQR преобразуют в $\Delta P'Q'R'$ если $P(1,1), Q(1,2), R(4,4)$ и $P'(5,-4), Q'(7,-8), R'(4,1)$. Запишите преобразование в матричной форме.



$$f: O, A, B \mapsto P, Q, R$$

$$g: O, A, B \mapsto P', Q', R'$$



$$f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\vec{PQ} \quad \vec{PR}$

$\uparrow$
 $\vec{OP}$

$$\vec{PQ}(0,1)$$

$$\vec{PR}(3,3)$$

$$\vec{OP}(1,1)$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \text{adj} C = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f^{-1}: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - C^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f^{-1}: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f^{-1} := \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (1)$$

$$g: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\vec{P'Q'} \quad \vec{P'R'}$

$\uparrow$
 $\vec{OP'}$

$$\vec{P'Q'}(2,-4)$$

$$\vec{P'R'}(-1,5)$$

$$\vec{OP'}(5,-4)$$

$$\Rightarrow g := \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2)$$

$$(2), (1) \Rightarrow g \circ f^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -4 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{7}{3} & 2 & \frac{16}{3} \\ \frac{17}{3} & -4 & -\frac{17}{3} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 \\ \frac{17}{3} & -4 \end{bmatrix}}^M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ -\frac{17}{3} \end{bmatrix} \quad \text{gđ} \quad \boxed{\begin{array}{l} x' = -\frac{7}{3}x + 2y + \frac{16}{3} \\ y' = \frac{17}{3}x - 4y - \frac{17}{3} \end{array}}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} -\frac{7}{3} & 2 \\ \frac{17}{3} & -4 \end{vmatrix} = \frac{28}{3} - \frac{34}{3} = -\frac{6}{3} = -2 < 0 \Rightarrow \text{PREOBRATKA JE NE UBA ORJENTACIJO}$$

8) Da li su odgovarajuće PQR i $P'Q'R'$ kongruentni ako je $P(0,0), Q(5,5)$
 $R(10,-15)$ i $P'(1,-7), Q'(0,0), R'(19,-8)$.

$$\overrightarrow{PQ}(5,5) \Rightarrow \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{PR}(10,-15) \Rightarrow \|\overrightarrow{PR}\| = \sqrt{10^2+(-15)^2} = \sqrt{100+225} = \sqrt{25 \cdot 4 + 25 \cdot 9} = 5\sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{QR}(5,-20) \Rightarrow \|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{5^2+(-20)^2} = \sqrt{25+400} = \sqrt{25 \cdot 1 + 25 \cdot 16} = 5\sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{P'Q'}(-1,7) \Rightarrow \|\overrightarrow{P'Q'}\| = \sqrt{(-1)^2+7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

$$\overrightarrow{Q'R'}(19,-8) \Rightarrow \|\overrightarrow{Q'R'}\| = \sqrt{19^2+(-8)^2} = \sqrt{361+64} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17} = \|\overrightarrow{QR}\|$$

$$\overrightarrow{P'R'}(18,-1) \Rightarrow \|\overrightarrow{P'R'}\| = \sqrt{18^2+(-1)^2} = \sqrt{324+1} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13} = \|\overrightarrow{PR}\|$$

ccc
 $\Rightarrow$

$$\triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$$

9) Određite uzastopnu koja preslikava PQR u $P'Q'R'$. O kojoj se uzastopnoj radi?

$$\begin{array}{ccc} P(0,0) & \xrightarrow{f^{-1}} & O(0,0) & \xrightarrow{g} & P'(1,-7) \\ Q(5,5) & \xleftarrow{f} & A(1,0) & & Q'(0,0) \\ R(10,-15) & & B(0,1) & & R'(19,-8) \end{array}$$

$\xrightarrow{g \circ f^{-1}}$

$$f: OAB \rightarrow PQR$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\overrightarrow{PQ} \quad \overrightarrow{PR} \quad \overrightarrow{OP}$

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & -15 \end{bmatrix} = 5 \cdot (-15) - 5 \cdot 10 = -125$$

$$C^{-1} = \frac{1}{-125} \begin{bmatrix} -15 & -10 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f^{-1}: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$f^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{3}{25} & \frac{2}{25} & 0 \\ \frac{1}{25} & -\frac{1}{25} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$g: OAB \mapsto P'Q'R'$$

$$g: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 18 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\vec{P'Q'}$ $\vec{P'R'}$ $\vec{OP'}$

$$g = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 18 & 1 \\ 7 & -1 & -7 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow g \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 18 & 1 \\ 7 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{25} & \frac{2}{25} & 0 \\ \frac{1}{25} & -\frac{1}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

РОТАЦИЯ

ТРАНСЛАЦИЯ

ТРАНСЛАЦИЯ

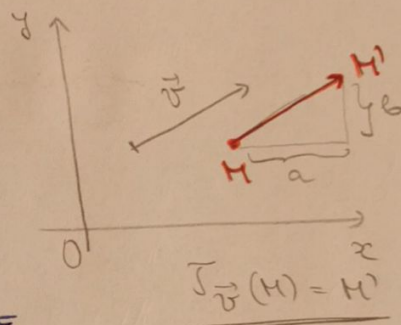
$T_{\vec{v}}, \vec{v}(a, b)$

(**)

$$T_{\vec{v}}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

↑
COORDINATE

ВЕКТОРА ТРАНСЛАЦИИ



РОТАЦИЯ

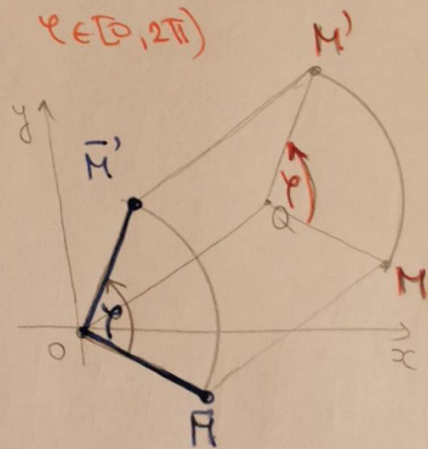
(*)

* ОКО КООРДИНАТНОГО ПОЧЕТКА ЗА УГЛОМ $\varphi \in [0, 2\pi)$, φ — угол поворота

$$R_{O, \varphi}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

* ОКО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКИ Q ЗА УГЛОМ $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$R_{Q, \varphi} = T_{\vec{OQ}} \circ R_{O, \varphi} \circ T_{\vec{QO}}$$



$$\cos \varphi = \frac{3}{5}$$

$$\sin \varphi = \frac{4}{5}$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{9}{25}$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{16}{25}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos^2 \varphi = \frac{9}{25} \\ \sin^2 \varphi = \frac{16}{25} \end{array} \right\} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \arccos \frac{3}{5}}$$

$$\Rightarrow \underline{R_{O, \varphi}}, \varphi = \arccos \frac{3}{5} \quad \text{и} \quad \underline{T_{\vec{v}}}, \vec{v} = (1, -7)$$

СКАСТИРАЊЕ

$\mathcal{H}_{Q, \Lambda_1, \Lambda_2} \leftarrow$ у ПРАВИЦУ КООРДИНАТНИХ ОСА
СА ЦЕНТРОМ У ТАЧКИ Q
 $\Lambda_1, \Lambda_2 \neq 0$

Q је фиксна

БАЗНИ ВЕКТОР $\vec{e}_1 \mapsto \Lambda_1 \vec{e}_1$
 $\vec{e}_2 \mapsto \Lambda_2 \vec{e}_2$

$$\mathcal{H}_{0, \Lambda_1, \Lambda_2} = \mathcal{H}_{\Lambda_1, \Lambda_2} : \begin{matrix} \uparrow \\ \text{КООРДИНАТНИ ПОЧЕТАК} \end{matrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$Q \neq 0$: $\mathcal{H}_{Q, \Lambda_1, \Lambda_2} = J_{\vec{OQ}} \circ \mathcal{H}_{\Lambda_1, \Lambda_2} \circ J_{\vec{QO}}$

СПЕЦИЈАЛНО: $0 \neq \Lambda_1 = \Lambda_2$

$\mathcal{H}_{Q, \Lambda}$ ХОМОТЕТИЈА

$\mathcal{H}_{Q, \Lambda} : M \mapsto M' \quad \text{ог.} \quad \overrightarrow{QM'} = \Lambda \overrightarrow{QM}$

③ Одредити ф-ке хомотеије са центром у тачки $C(1,2)$ и
коэффицијентом 3. У којој тачки се пројектира координатни
почетак при овој хомотеији?

$$\mathcal{H}_{C, k} = J_{\vec{OQ}} \circ \mathcal{H}_k \circ J_{\vec{CQ}}$$

$$\mathcal{H}_k : \begin{matrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{ог.} \quad \begin{matrix} \vec{e}_1' = k \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2' = k \vec{e}_2 \end{matrix}$$

$$J_{\vec{CQ}} : \begin{matrix} \vec{CQ}(-1, -2) \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

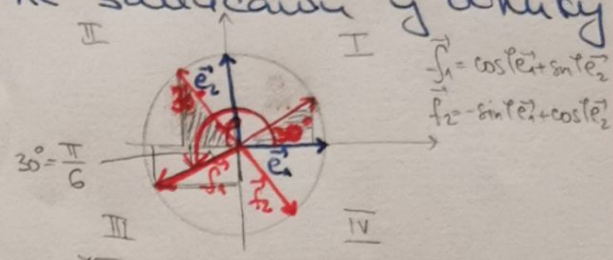
$$\mathcal{H}_k : \left(\begin{array}{cc|c} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \vec{OQ} \downarrow$$

$$\mathcal{H}_{C, 3} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{ог.} \quad \begin{cases} x' = 3x - 2 \\ y' = 3y - 4 \end{cases}$$

$O(0,0) \mapsto (-2, -4)$

⑩ Определите формулу поворота за угол $\varphi = \frac{7\pi}{6}$ око точки $A(-2,3)$. У коју тачку се пресичава тачка $M(1,3)$ при овој повороти? (НАПОМЕНА: резултат, тј. ф-не записане у облику $x' = \dots, y' = \dots$)



$$R_{A,\varphi} = T_{OA} \circ R_{O,\varphi} \circ T_{AO}$$

$$R_{O,\varphi} = R_{\varphi} : \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$\cos \varphi = \cos \frac{7\pi}{6} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \varphi = \sin \frac{7\pi}{6} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$R_{\varphi} : \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow R_{\varphi} : \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$T_{OA} : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \vec{OA} \\ 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \vec{OA}(-2,3)$$

$$T_{AO} : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \vec{AO}(2,-3)$$

$$R_{A,\varphi} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -\sqrt{3} - \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -\sqrt{3} - \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sqrt{3} - \frac{7}{2} \\ 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad \text{тј.}$$

$$\begin{cases} x' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \sqrt{3} - \frac{7}{2} \\ y' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 \end{cases}$$

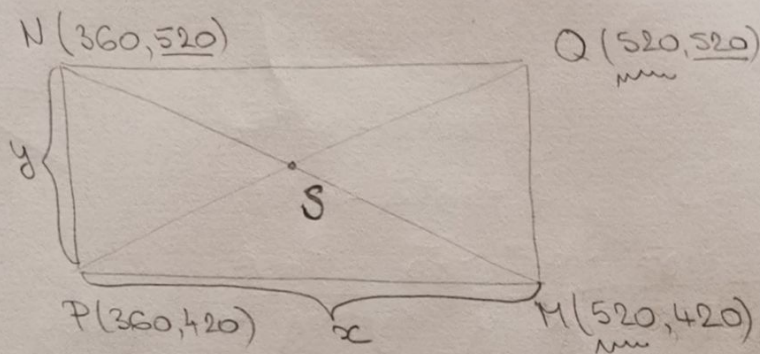
$$(*) \quad \underline{M' = R_{A,\varphi}(M)}$$

$$M(1,3) \xrightarrow{(*)} M' : \underline{x' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 - \sqrt{3} - \frac{7}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2}$$

$$\underline{y' = -\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{M' \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2, \frac{3}{2} \right)}$$

11) Користник је оделелио правоугаоник (рецимо слику) са насупрнимим угловима $P(360, 420)$ и $Q(520, 520)$. Срединах флексије трансформације која даје правоугаоник пресликава на цео екран димензија 800×600 без дисторзије, тј. хомологија.



Димензије правоугаоника су $x \times y$: $x = 520 - 360 = 160$
 $y = 520 - 420 = 100 \Rightarrow \underline{\underline{160 \times 100}}$

Правилно коефицијент хомологије:

$$800 : 160 = 5$$

$$600 : 100 = 6$$

$$6 \cdot 160 = 960 > 800$$

$\Rightarrow$ не сагаје у цео случају слика на екран

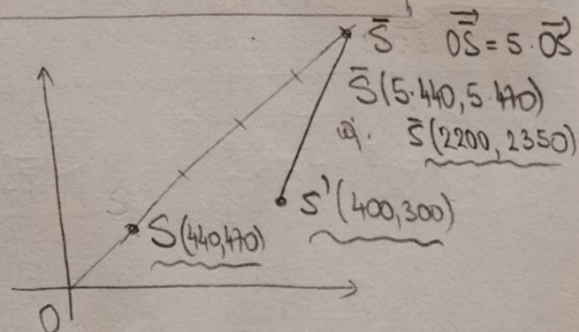
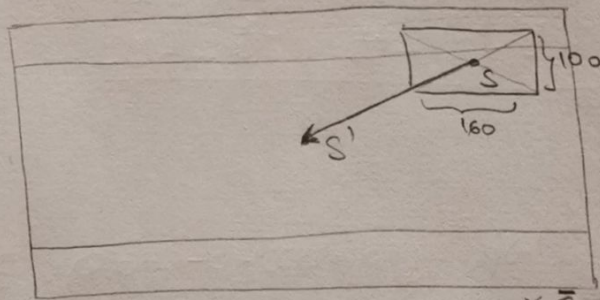
$\Rightarrow$ коефицијент хомологије је 5

$$\boxed{k=5}$$

$$S\left(\frac{360+520}{2}, \frac{520+420}{2}\right) \text{ тј. } S(440, 470)$$

$$\underline{\underline{S(440, 470)}}$$

$$S'\left(\frac{800}{2}, \frac{600}{2}\right) \text{ тј. } \underline{\underline{S'(400, 300)}}$$



$$H_5 : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}_{\text{КОМОТЕМА}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1800 \\ -2050 \end{bmatrix}}_{\text{ВЕКТОР ТРАНСЛАЦИЈЕ}} \text{ (4)}$$

Хомологија се центар слике S пресликава у тачку $\bar{S}$. Трансформација преба да центар $\bar{S}$ памерио у S' тачку (центар екрана, тј. вектор трансформације је $\bar{S}S' = (400, 300) - (2200, 2350)$
 $\Rightarrow \bar{S}S' = (-1800, -2050) \Rightarrow \underline{\underline{x' = 5x - 1800, y' = 5y - 2050}}$

РЕФЛЕКСИЈА

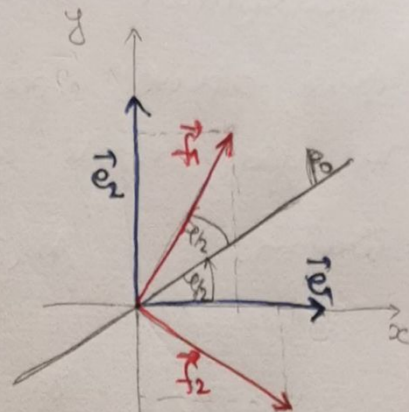
у односу на праву $p: \exists O$
гради угао $\frac{\varphi}{2}$ са x -осом

у равни која

$$S_{p_0} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2 \\ \vec{f}_2 &= \sin \varphi \vec{e}_1 - \cos \varphi \vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$S_p = J_{\vec{OP}} \circ S_{p_0} \circ J_{\vec{PO}}, P \in p$$

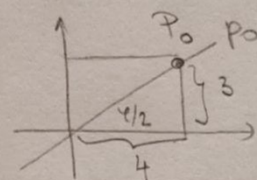


$$3x - 4y - 6 = 0$$

12) Определите ф-не рефлексии у огносу на праву

I НАЧИН:

$$p: 3x - 4y + 6 = 0 \Rightarrow p_0: 3x - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$$



$$\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

$$OP_0 = |\vec{OP}_0| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\cos \varphi = \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \left(\frac{4}{5} \right)^2 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{16 - 9}{25} = \frac{7}{25}$$

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{4}{5}, \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{5}$$

$$S_{p_0} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

или

$$S_{p_0} : \left(\begin{array}{cc|c} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} & 0 \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$P \in p: \text{напр. } y=0 \Rightarrow 3x - 0 - 6 = 0 \text{ или } x=2 \text{ или } P(2,0)$$

$$S_p = J_{\vec{OP}} \circ S_{p_0} \circ J_{\vec{PO}}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP}(2,0) &\Rightarrow J_{\vec{OP}} : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \vec{PO}(0,2) &\Rightarrow J_{\vec{PO}} : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_p &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} & 0 \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} & -\frac{14}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} & -\frac{48}{25} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} & \frac{36}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} & -\frac{48}{25} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$x' = \frac{1}{25}(7x + 24y + 36)$$

$$y' = \frac{1}{25}(24x - 7y - 48)$$

II ЗАДАЧА: РЕФЛЕКСИЈА $S_p = I_2 - 2\vec{n}\vec{n}^T$, $\vec{n}$ - ЈЕДИНИЧНИ НОРМАЛНИ ВЕКТОР (ВЕКТОР КОСИНУСА)

$$p: 3x-4y-6=0 \Rightarrow \vec{n}_p(3,-4) \Rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{n}_p}{\|\vec{n}_p\|} = \frac{(3,-4)}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{(3,-4)}{\sqrt{9+16}} = \frac{(3,-4)}{5} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

$$\begin{aligned} S_p &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

13) Одредити формуле рефлексije y односу на раван $\Delta_0: 2x-y+2z=0$ у простору.

$$\Delta_0: 2x-y+2z=0, \quad O(0,0,0) \in \Delta_0$$

РЕФЛЕКСИЈА у простору

$$\Rightarrow S_{\Delta_0} = I_3 - 2\vec{n}\vec{n}^T, \quad \vec{n} - \text{ЈЕДИНИЧНИ НОРМАЛНИ ВЕКТОР}$$

$$\vec{n}_{\Delta_0}(2,-1,2) \rightarrow \vec{n} = \frac{\vec{n}_{\Delta_0}}{\|\vec{n}_{\Delta_0}\|} = \frac{(2,-1,2)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{(2,-1,2)}{\sqrt{4+1+4}} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta_0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{9} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{9}(x+4y-8z) \\ y' = \frac{1}{9}(4x+7y+4z) \\ z' = \frac{1}{9}(-8x+4y+z) \end{cases}$$

РОТАЦИЈА у простору

$$R_{p,\phi} := T_{OP} \circ R_{p,\phi} \circ T_{PO}, \quad P \in p$$

$$R_{p,\phi} = pp^T + \cos\phi(I_3 - pp^T) + \sin\phi p_x, \quad \vec{p} - \text{ВЕКТОР КОСИНУСА, ЈЕДИНИЧНИ ВЕКТОР ВЕКТОРА } \vec{p}$$

$$p_x := \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{МАТРИЦА ВЕКТОРСКОГ МНОЖЕЊА ЈЕДИНИЧНИМ ВЕКТОРОМ } p$$

ПРОИЗВОДНИ ВЕКТОР

$$\vec{p} \times \vec{q} = p_x \cdot q$$

↑
МАТРИЦА

• x^0 -ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД ЈЕ АНТИСИМЕТРИЧАН

14) Определить ф-лу поворота за угол $\phi = \frac{\pi}{2}$ око напра p ,
 $p: P(0, 1, 0)$, $\vec{P}(-1, 2, 2)$.

$$\vec{P}(1, 2, 2) \quad \|\vec{P}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = 3 \quad \Rightarrow p = \frac{\vec{P}}{\|\vec{P}\|} = \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$$

$$p \cdot p^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \leftarrow p_1$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \leftarrow p_2$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \leftarrow p_3$$

$$\cos \phi = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin \phi = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$p_x = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R_{p, \frac{\pi}{2}}} = pp^T + \cos \phi (\underline{I}_3 - pp^T) + \sin \phi p_x =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{PO} = (0, -1, 0)$$

$$\vec{OP} = (0, 1, 0)$$

$$\underline{R_{p, \frac{\pi}{2}}} = \underline{J_{\vec{OP}}} \cdot R_{p, \frac{\pi}{2}} \cdot \underline{J_{\vec{PO}}} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & 0 \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & 1 \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{8}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} & \frac{5}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{1}{9}x - \frac{8}{9}y + \frac{4}{9}z - \frac{8}{9} \\ y' &= \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}y + \frac{7}{9}z + \frac{5}{9} \\ z' &= -\frac{8}{9}x + \frac{1}{9}y + \frac{4}{9}z - \frac{1}{9} \end{aligned}}$$

15) Определить координаты проекции прямой $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$ на плоскость

$$\alpha: 2x + y - 4z + 5 = 0.$$

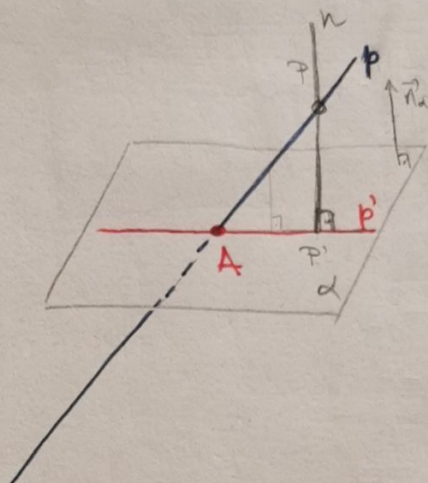
$$p: \vec{P}(1, 2, 2) \quad P(1, 0, -3)$$

$$\alpha: \vec{n}_\alpha(2, 1, -4)$$

$$p: x = t + 1$$

$$y = 2t \quad \leadsto \alpha: 2x + y - 4z + 5 = 0$$

$$z = 2t - 3$$



$$\Rightarrow 2(t+1) + 2t - 4(2t-3) + 5 = 0$$

$$2t + 2 + 2t - 8t + 12 + 5 = 0$$

$$-4t + 19 = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{19}{4}} \leadsto p \Rightarrow A: x = t + 1 = \frac{19}{4} + 1 = \frac{23}{4}$$

$$y = 2t = 2 \cdot \frac{19}{4} = \frac{19}{2}$$

$$z = 2t - 3 = 2 \cdot \frac{19}{4} - 3 = \frac{13}{2}$$

$$\text{отв. } A\left(\frac{23}{4}, \frac{19}{2}, \frac{13}{2}\right)$$

$$n: n \in p, \vec{n} \sim \vec{n}_\alpha(2, 1, -4)$$

$$\Rightarrow n: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-4} = \lambda$$

$$n \cap \alpha = \{P'\}$$

$$n: x = 2\lambda + 1$$

$$y = \lambda \quad \leadsto \alpha: 2x + y - 4z + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$z = -4\lambda - 3$$

$$2 \cdot (2\lambda + 1) + \lambda - 4(-4\lambda - 3) + 5 = 0$$

$$4\lambda + 2 + \lambda + 16\lambda + 12 + 5 = 0$$

$$21\lambda + 19 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{19}{21}} \leadsto n \Rightarrow P': x = 2 \cdot \left(-\frac{19}{21}\right) + 1 = -\frac{38}{21} + 1 = -\frac{17}{21}$$

$$y = -\frac{19}{21}$$

$$z = -4 \cdot \left(-\frac{19}{21}\right) - 3 = \frac{76}{21} - 3 = \frac{13}{21}$$

$$\Rightarrow \boxed{P'\left(-\frac{17}{21}, -\frac{19}{21}, \frac{13}{21}\right)}$$

$$\vec{p} \sim \vec{AP'} \left(-\frac{551}{84}, -\frac{437}{42}, -\frac{247}{42} \right) \cdot 84 \sim (551, 874, 494) \cdot 19 \sim (29, 46, 26)$$

$$\Rightarrow p: \frac{x + \frac{17}{21}}{29} = \frac{y + \frac{19}{21}}{46} = \frac{z - \frac{13}{21}}{26}$$

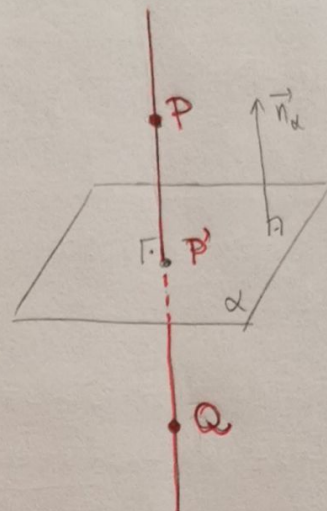
16) Odrediti tačku Q koja je simetrična tački $P(3, -2, -4)$ u odnosu na ravan $\alpha: 6x + 2y - 3z - 75 = 0$ kao i projekciju P' tačke P na ravan α .

$$\alpha: 6x + 2y - 3z - 75 = 0$$

$$\vec{n}_\alpha(6, 2, -3) \Rightarrow \vec{n} \sim \vec{n}_\alpha(6, 2, -3)$$

$$n: \begin{cases} x = 6t + 3 \\ y = 2t - 2 \\ z = -3t - 4 \end{cases}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\vec{n}$ P



$$n \cap \alpha = \{P'\} : n \leadsto \alpha \Rightarrow 6(6t+3) + 2(2t-2) - 3(-3t-4) - 75 = 0$$

$$36t + 18 + 4t - 4 + 9t + 12 - 75 = 0$$

$$49t - 49 = 0 \Rightarrow \boxed{t=1} \leadsto n$$

$$P': \begin{aligned} x &= 6 \cdot 1 + 3 = 9 \\ y &= 2 \cdot 1 - 2 = 0 \\ z &= -3 \cdot 1 - 4 = -7 \end{aligned}$$

$$\text{odj. } \boxed{P'(9, 0, -7)}$$

I NAČIN:

$$\text{za } t=0 \Rightarrow P(3, -2, -4)$$

$$t=1 \Rightarrow P'(9, 0, -7)$$

$$\Rightarrow t=2 \Rightarrow Q: \begin{aligned} x &= 6 \cdot 2 + 3 = 15 \\ y &= 2 \cdot 2 - 2 = 2 \\ z &= -3 \cdot 2 - 4 = -10 \end{aligned}$$

$$y = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$

$$z = -3 \cdot 2 - 4 = -10$$

$$\text{odj. } \underline{\underline{Q(15, 2, -10)}}$$

II NAČIN:

$$P' = \frac{P+Q}{2} \quad \text{odj.} \quad 2P' = P+Q \Rightarrow \underline{\underline{Q = 2P' - P}}$$

$$Q = 2 \cdot (9, 0, -7) - (3, -2, -4) = (18, 0, -14) - (3, -2, -4) = (15, 2, -10)$$

$$\text{odj. } \boxed{Q(15, 2, -10)}$$

17) Odredišti tačku Q koja je simetrična tački $P(-1, -2, 1)$ u odnosu na pravu $\ell: \frac{x}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{1}$ kao i projekciju P' tačke P na pravu ℓ .

$$\ell: \vec{\ell}(-2, 4, 1) \quad L(0, 3, 4)$$

$$P': P' \in \ell \Rightarrow \underline{P'(-2t, 4t+3, t+4)}$$

$$\Rightarrow \vec{PP'}(-2t+1, 4t+5, t+3)$$

$$\vec{PP'} \perp \vec{\ell} \Leftrightarrow \underline{\vec{PP'} \cdot \vec{\ell} = 0} \quad \text{od}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (-2t+1, 4t+5, t+3) \cdot (-2, 4, 1) = \\ &= -2(-2t+1) + 4(4t+5) + 1 \cdot (t+3) = \\ &= 4t - 2 + 16t + 20 + t + 3 = \\ &= \underline{21t + 21} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 21(t+1) = 0 \Rightarrow \boxed{t = -1} \rightsquigarrow P'(-2(-1), 4(-1)+3, -1+4) \quad \text{od}$$

$$\boxed{P'(2, -1, 3)}$$

$$\vec{PP'}(-2(-1)+1, 4(-1)+5, -1+3) \quad \text{od}$$

$$\underline{\vec{PP'}(3, 1, 2)}$$

$$\underline{Q = P + \lambda \vec{PP'}}$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow P(-1, -2, 1)$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow P'(2, -1, 3)$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow Q = P + 2 \cdot \vec{PP'} = (-1, -2, 1) + 2(3, 1, 2) = (-1, -2, 1) + (6, 2, 4) = \underline{\underline{(5, 0, 5)}}$$

18) Odredišti centralnu projekciju tačke $P(1, 2, 3)$ na ravan $z = -1$, ako je centar projektovanja tačka $O(0, 0, 0)$.

$$\alpha: z = -1$$

$$p: p \in O, P \quad \vec{OP}(1, 2, 3)$$

$$\Rightarrow p: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = t$$

$$p: \begin{aligned} x &= t \\ y &= 2t \\ z &= 3t \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \alpha \Rightarrow 3t = -1 \Rightarrow \boxed{t = -\frac{1}{3}} \rightsquigarrow p: \begin{aligned} x &= -\frac{1}{3} \\ y &= 2 \cdot (-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3} \\ z &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{P'(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1)}$$

