ГЛАВА 10

Геометрија Hilbert-ових простора

1. Сесквилинеарне и квадратне форме

Нека је X дати векторски простор над пољем $\mathbb{K}$, где је као и досад $\mathbb{K}$ било поље $\mathbb{R}$ реалних или поље $\mathbb{C}$ комплексних бројева, с тим што ће даља разматрања суштински бити оријентисана пре свега на комплексне векторске просторе.

Дефиниција 10.1. *Пресликавање* $\Phi : X \times X \to \mathbb{K}$ *је* ***сесквилинеарна форма*** *на* X *уколико за свако* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *и за све* $f, g, h \in X$ *важи*

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha f + \beta g, h) &= \alpha \Phi(f, h) + \beta \Phi(g, h), \\ \Phi(f, \alpha g + \beta h) &= \bar{\alpha} \Phi(f, g) + \bar{\beta} \Phi(f, h), \end{aligned} \tag{10.1}$$

(линеарност по првој и антилинеарност по другој промењљивој).

Вредност $\Phi(f, g)$ означаваћемо често и са $\langle f, g\rangle_\Phi$, те у том смислу кажемо и да је $\Phi = \langle \cdot, \cdot \rangle_\Phi$. Тако (10.1) записујемо и као

$$\begin{aligned} \langle \alpha f + \beta g, h\rangle_\Phi &= \alpha \langle f, h\rangle_\Phi + \beta \langle g, h\rangle_\Phi, \\ \langle f, \alpha g + \beta h\rangle_\Phi &= \bar{\alpha} \langle f, g\rangle_\Phi + \bar{\beta} \langle f, h\rangle_\Phi. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Уколико је у (10.2) уместо антилинеарности форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Phi$ линеарна и по другој промењљивој, онда се она назива **билинеарном**. Примећујемо да се у случају $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ сесквилинеарност поклапа са билинеарношћу.

Свакој сесквилинеарној форми придружује се и њена **квадратна** форма $\varphi : X \to \mathbb{K}$ одређена изразом $\varphi(f) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, f\rangle_\Phi$, који такође означавамо и са $[f]_\Phi$. Приметимо да се из (10.2) непосредно закључује да је

$$[\alpha f]_\Phi = |\alpha|^2 [f]_\Phi \qquad \text{за свако } f \in X \text{ и } \alpha \in \mathbb{K}, \tag{10.3}$$

а из особина (10.2) закључујемо да важи и

Став 10.1. [правило паралелограма] *За сваку квадратну форму* $[\cdot]_\Phi$ *је*

$$[f+g]_\Phi + [f-g]_\Phi = 2[f]_\Phi + 2[g]_\Phi, \qquad \textit{за све } f, g \in X. \tag{10.4}$$

Слично се проверава и следећи идентитет

Лема 10.2. *За све* $f, g \in X$ *је*

$$\langle f+g, f+g\rangle_\Phi - \langle f-g, f-g\rangle_\Phi = 2\langle f, g\rangle_\Phi + 2\langle g, f\rangle_\Phi.$$

У реалном векторском простору једна те иста квадратна форма може бити додељена различитим сесквилинеарним формама. На пример, сесквилинеарне форме $\big\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\big\rangle_1 \stackrel{\text{def}}{=} x_1y_2 - x_2y_1$ и $\big\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2)\big\rangle_2 \stackrel{\text{def}}{=} 0$ на $\mathbb{R}^2$ имају исту (конкретно тривијалну) квадратну форму. У комплексном векторском простору овакво придруживање форми је обострано једнозначно, јер важи

Став 10.3. **[поларизациони идентитет]** ***За сваку сесквилинеарну форму $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Phi$ у комплексном векторском простору X, и све $f,g\in X$ важи***

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle_\Phi &=\\ &= \tfrac14\big(\langle f+g,f+g\rangle_\Phi - \langle f-g,f-g\rangle_\Phi + i\,\langle f+ig,f+ig\rangle_\Phi - i\,\langle f-ig,f-ig\rangle_\Phi\big)\\ &= \tfrac14\big([f+g]_\Phi - [f-g]_\Phi + i\,[f+ig]_\Phi - i\,[f-ig]_\Phi\big).\end{aligned}$$

Идентитет се директно проверава према (10.2).

Дефиниција 10.2. *Сесквилинеарна форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Phi$ назива се* ***Hermite[1]-ском*** *уколико је*

$$\langle g,f\rangle_\Phi = \overline{\langle f,g\rangle_\Phi}, \qquad \text{за све } f,g\in X. \tag{10.5}$$

Слично, квадратна форма $[\cdot]_\Phi$ назива се ***реалном*** *уколико је $[f]_\Phi\in\mathbb{R}$ за свако $f\in X$.*

Следећи став описује ситуације у којима се управо то дешава.

Став 10.4. ***У сваком комплексном векторском простору X следећа тврђења су међусобно еквивалентна:***

1° $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Phi$ ***је Hermite-ска сесквилинеарна форма,***
2° $[\cdot]_\Phi$ ***је реална квадратна форма,***
3° $\mathfrak{Re}\,\langle f,g\rangle_\Phi = \frac14\big([f+g]_\Phi - [f-g]_\Phi\big)$ ***за свако*** $f,g\in X$,
4° $\mathfrak{Im}\,\langle f,g\rangle_\Phi = \frac14\big([f+ig]_\Phi - [f-ig]_\Phi\big)$ ***за свако*** $f,g\in X$.

△ Како је $\overline{[f]_\Phi} = \overline{\langle f,f\rangle_\Phi} = \langle f,f\rangle_\Phi = [f]_\Phi$, то је онда 2° последица 1°.

Ако је $[\cdot]_\Phi$ реална, на основу поларизационог идентитета имамо да је

$$\mathfrak{Re}\,\langle f,g\rangle_\Phi = \tfrac14\mathfrak{Re}\big([f+g]_\Phi - [f-g]_\Phi + i\,[f+ig]_\Phi - i\,[f-ig]_\Phi\big) = \tfrac14\big([f+g]_\Phi - [f-g]_\Phi\big),$$

те тако 3° следи из 2°.

Из 3° следи 4°, будући да је

$$\mathfrak{Im}\langle f,g\rangle_\Phi = \mathfrak{Re}\big(-i\,\langle f,g\rangle_\Phi\big) = \mathfrak{Re}\,\langle f,ig\rangle_\Phi = \tfrac14\big([f+ig]_\Phi - [f-ig]_\Phi\big).$$

Како је

$$\begin{aligned}\overline{\langle f,g\rangle_\Phi} &= \mathfrak{Re}\,\langle f,g\rangle_\Phi - i\mathfrak{Im}\,\langle f,g\rangle_\Phi = \mathfrak{Im}\,\langle if,g\rangle_\Phi - i\mathfrak{Im}\,\langle if,ig\rangle_\Phi\\ &= \tfrac14\big([if+ig]_\Phi - [if-ig]_\Phi - i\,[if-g]_\Phi + i\,[if+g]_\Phi\big) = \langle g,f\rangle_\Phi\,,\end{aligned} \tag{10.6}$$

на основу поларизационог идентитета, то дакле и 1° следи из 4°, чиме је доказ овог става употпуњен. □

[1] Ермит–Charles Hermite (1822–1901)

Од идентитета за реалне форме поменимо још да важи и

$$[f+g]_\Phi = [f]_\Phi + [g]_\Phi + 2\mathfrak{Re}\,\langle f, g\rangle_\Phi \qquad \text{за све } f, g \in X. \tag{10.7}$$

ДЕФИНИЦИЈА 10.3. *Квадратна форма* $[\cdot]_\Phi$ *назива се* ***позитивном****, а њена сесквилинеарна форма* $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Phi$ ***предскаларним производом*** *уколико је* $[f]_\Phi$ *не само реално, него и ненегативно за свако* $f \in X$. *Ако је притом још и* $[f]_\Phi > 0$ *за свако* $f \neq 0$, *форма* $[\cdot]_\Phi$ *назива се* ***строго позитивном****, а* $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Phi$ *зовемо* ***унутрашњим****или* ***скаларним производом****.*

Како је то прилично уобичајено, за скаларни производ се употребљава поједностављена ознака $\langle\cdot,\cdot\rangle$, за коју ћемо се и ми у наставку определити.

ДЕФИНИЦИЈА 10.4. *Сви простори са унутрашњим производом називају се* ***унитарним*** *просторима.*

Важност позитивних форми почива добрим делом и на следећој (вероватно најпознатијој) неједнакости математичке анализе:

ТЕОРЕМА 10.5. **[неједнакост Cauchy-Schwarz-Bunjakowsky[2]-ог]** ***За сваку позитивну сесквилинеарну форму*** $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Phi$ ***на*** X ***важи***

$$\boxed{|\langle f, g\rangle_\Phi| \le \sqrt{\langle f, f\rangle_\Phi}\sqrt{\langle g, g\rangle_\Phi}} \qquad \text{за све } f, g \in X. \tag{10.8}$$

За строго позитивне форме једнакост у (10.8) ***важи за неке*** $f, g \neq 0$ ***онда и само онда кад су они линеарно зависни.***

$\triangle$ По правилима (10.2), и (10.7) утврђујемо да је

$$\begin{aligned}
0 \le& \big\langle \langle g,g\rangle_\Phi f - \langle f,g\rangle_\Phi g, \langle g,g\rangle_\Phi f - \langle f,g\rangle_\Phi g\big\rangle_\Phi \\
&= \langle g,g\rangle_\Phi^2 \langle f,f\rangle_\Phi + \big|\langle f,g\rangle_\Phi\big|^2 \langle g,g\rangle_\Phi - 2\mathfrak{Re}\big\langle \langle g,g\rangle_\Phi f, \langle f,g\rangle_\Phi g\big\rangle_\Phi \\
&= \langle g,g\rangle_\Phi \big(\langle f,f\rangle_\Phi \langle g,g\rangle_\Phi + |\langle f,g\rangle_\Phi|^2 - 2\mathfrak{Re}\{\overline{\langle f,g\rangle_\Phi}\,\langle f,g\rangle_\Phi\}\big) \\
&= \langle g,g\rangle_\Phi \big(\langle f,f\rangle_\Phi \langle g,g\rangle_\Phi - |\langle f,g\rangle_\Phi|^2\big),
\end{aligned}$$

што доказује први део тврђења кад је $\langle g,g\rangle_\Phi > 0$. Слично се доказује и кад је $\langle f,f\rangle_\Phi > 0$, док за $\langle f,f\rangle_\Phi = \langle g,g\rangle_\Phi = 0$ (10.8) следи из

$$-2\big|\langle f,g\rangle_\Phi\big|^3 = \Big\langle \big|\langle f,g\rangle_\Phi\big| f - \langle f,g\rangle_\Phi g, \big|\langle f,g\rangle_\Phi\big| f - \langle f,g\rangle_\Phi g\Big\rangle_\Phi \ge 0.$$

Да би у (10.8) за скаларни производ $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Phi$ важио знак једнакости мора бити $\langle g,g\rangle_\Phi f - \langle f,g\rangle_\Phi g = 0$, тј. f и g морају бити линеарно зависни. Да је то и довољан услов за важење (10.8) проверева се непосредно. $\square$

Кад је простор X још и нормиран, од интереса је и следећа

ДЕФИНИЦИЈА 10.5. *Сесквилинеарна форма* $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Phi$ *дефинисана на нормираном векторском простору* X *назива се* ***ограниченом*** *уколико је*

$$\|\Phi\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\langle f,g\rangle_\Phi|, \tag{10.9}$$

[2] Буњаковски– Viktor Jakovlevich Bunyakowsky (1804–1889)

који се назива ***нормом*** *те* ***сесквилинеарне форме****, коначан.*

Директно се проверава и да је

$$\left|\langle f, g\rangle_\Phi\right| \leq \|\Phi\| \, \|f\| \, \|g\| \qquad \text{за све } f, g \in X, \tag{10.10}$$

као и да је

$$\|\Phi\| = \inf\left\{C > 0 : |\langle f, g\rangle_\Phi| \leq C \, \|f\| \, \|g\| \quad \text{за све } f, g \in X\right\}.$$

Слично се и за било коју квадратну форму $[\cdot]_\Phi$ каже да је **ограничена** уколико је $\|\varphi\| \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\|f\|=1} \left|[f]_\Phi\right|$ коначан, те се опет показује да за њих онда важи и $\left|[f]_\Phi\right| \leq \|\varphi\| \, \|f\|^2$ за све $f \in X$.

Следећа лема говори о односу горњих величина код придружених форми.

Лема 10.6. ***За сваку сесквилинеарну форму*** Φ ***и њену квадратну форму*** φ ***важи*** $\|\varphi\| \leq \|\Phi\| \leq 4 \, \|\varphi\|$.

$\triangle$ Први део неједнакости је скоро очигледан будући да је

$$\|\varphi\| = \sup_{\|f\|=1} \left|\langle f, f\rangle_\Phi\right| \leq \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \left|\langle f, g\rangle_\Phi\right| = \|\Phi\|.$$

Из поларизационог идентитета и правила паралелограма закључујемо да је за свако $x, y \in \mathbb{S}_X \overset{\text{def}}{=} \mathbb{S}_X(0,1)$

$$\left|\langle x, y\rangle_\Phi\right| = \tfrac{1}{4}\left|[x+y]_\Phi - [x-y]_\Phi + i\,[x+iy]_\Phi - i\,[x-iy]_\Phi\right|$$
$$\leq \tfrac{\|\varphi\|}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\right) \leq 2\,\|\varphi\|\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = 4\,\|\varphi\|,$$

што доказује и преостали део тврђења. $\square$

Ограничене сесквилинеарне форме су увек непрекидне скаларне функције, како то показује следећа

Теорема 10.7. ***Ако је*** $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ ***и*** $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ ***за векторе простора*** X***, тада је*** $\lim_{n\to\infty} \langle f_n, g_n\rangle_\Phi = \langle f, g\rangle_\Phi$.

$\triangle$ Уочимо прво да је

$$\left|\langle f_n, g_n\rangle_\Phi - \langle f, g\rangle_\Phi\right| = \tfrac{1}{2}\left|\langle f_n - f, g_n + g\rangle_\Phi + \langle f_n + f, g_n - g\rangle_\Phi\right|$$
$$\leq \|\Phi\| \, \|f_n - f\| \, \tfrac{1}{2}\, \|g_n + g\| + \|\Phi\| \, \|g_n - g\| \, \tfrac{1}{2}\, \|f_n + f\| \tag{10.11}$$
$$\leq \|\Phi\| \sqrt{\|f_n - f\|^2 + \|g_n - g\|^2} \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\,\|f_n - f\| + \|f\|\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\,\|g_n - g\| + \|g\|\right)^2} \tag{10.12}$$
$$\leq \|\Phi\| \sqrt{\|f_n - f\|^2 + \|g_n - g\|^2} \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\|f_n - f\|^2 + \|g_n - g\|^2} + \sqrt{\|f\|^2 + \|g\|^2}\right), \tag{10.13}$$

при чему (10.11) следи према (10.10), (10.12) по Cauchy-Schwarz-овој, а (10.13) по неједнакости Minkowski-ог у простору $\mathbb{C}^2$. Како израз у (10.13) тежи нули кад $n \to \infty$, одатле и коначан закључак овог тврђења. $\square$

Приметимо на крају да у случају да је један од низова $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ или $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ константан, ова торема показује да је скаларни производ непрекидан и по свакој од својих променљивих понаособ.

Вежбања 10.1.

1. Показати да је **простор** $\mathcal{F}(X)$ свих **ограничених сесквилинеарних форми** на нормираном векторском простору X један нормиран векторски простор над $\mathbb{K}$, ако се линеарна структура на њему дефинише са
$$(\alpha\Phi+\beta\Psi)(f,g)\overset{\text{def}}{=}\alpha\Phi(f,g)+\beta\Psi(f,g)\quad \text{за све } \Phi,\Psi\in\mathcal{F}(X),\text{ све } f,g\in X \text{ и } \alpha,\beta\in\mathbb{K},$$
а норма уведе са (10.9).
2. Доказати непрекидност ограничених квадратних форми.
3. Показати да сесквилинеарна форма $\Phi(p,q)\overset{\text{def}}{=}\int_0^1 p(x)\overline{q(x)}\,dx$ дата на простору свих комплексних полинома, нормираном са $\|p\|\overset{\text{def}}{=}\int_0^1|p(x)|\,dx$ за сваки полином p, није непрекидна, иако је непрекидна по свакој променљивој понаособ.
4. Показати да за сваку позитивну сесквилинеарну форму $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Phi$:
   а) скуп $L_0\overset{\text{def}}{=}\{f\in X:\langle f,f\rangle_\Phi=0\}$ је векторски потпростор у X,
   б) $\langle f+L_0,g+L_0\rangle_{\widetilde{\Phi}}\overset{\text{def}}{=}\langle f,g\rangle_\Phi$ коректно дефинише једну строго позитивну сесквилинеарну форму $\widetilde{\Phi}$ на X/L_0.

2. Hilbert-ов простор

Постојање скаларног производа на неком векторском простору је значајна особина која увек омогућава да се тај простор нормира.

ТЕОРЕМА 10.8. ***Ако је $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скаларни производ на X, тада је са***
$$\boxed{\|f\|\overset{\text{def}}{=}\sqrt{\langle f,f\rangle}\qquad \textit{за све } f\in X}$$
дефинисана тзв. скаларним производом индукована норма датог простора X.

$\triangle$ Очигледно је $\|f\|\geq 0$ за свако $f\in X$ и $\|f\|=0$ само при $f=0$. Такође је
$$\|\alpha f\|=\sqrt{\langle\alpha f,\alpha f\rangle}=\sqrt{|\alpha|^2\langle f,f\rangle}=|\alpha|\,\|f\|\qquad \text{за свако } \alpha\in\mathbb{C} \text{ и све } f\in X,$$
чиме је утврђена и хомогеност. Коначно, субадитивност утврђује следећа:

ТЕОРЕМА 10.9. [неједнакост Minkowski-ог] ***За свако $f,g\in X$ је***
$$\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|\,.$$

$\triangle$ Следи из тога што је
$$\|f+g\|=\sqrt{\|f\|^2+2\mathfrak{Re}\,\langle f,g\rangle+\|g\|^2}\leq\sqrt{\|f\|^2+2\sqrt{\langle f,f\rangle\langle g,g\rangle}+\|g\|^2}=\|f\|+\|g\|\,,$$
у складу са Cauchy-Schwarz-овом неједнакошћу. $\square$

На основу Cauchy-Schwarz-ове неједнакости непосредно закључујемо да је сваки скаларни производ, посматран у односу на собом индуковану норму, једна ограничена сесквилинеарна форма норме један. А с обзиром на теорему 10.7, одатле одмах произилази и

СТАВ 10.10. ***Скаларни производ је непрекидан у собом индукованој норми.***

Дефиниција 10.6. ***Hilbert[3]-овим*** *простором назива се сваки Banach-ов простор чија је норма индукована неким скаларним производом тог простора.*

Пример 10.1. За свако $d \in \mathbb{N}$ је простор $\mathbb{C}^d$ уређених d-торки комплексних бројева Hilbert-ов простор, када се у њега уведе скаларни призвод формулом

$$\langle (z_1, z_2, \cdots, z_d), (w_1, w_2, \cdots, w_d) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{d} z_k \overline{w}_k.$$

Напомена 10.11. Осим ако се експлицитно не каже другачије, под нормом $\mathbb{C}^d$ се увек подразумева тзв. Еуклидова норма индукована горњим скаларним производом.

Пример 10.2. Простор $\boldsymbol{\ell}^2$ квадратно сумабилних комплексних низова $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ за које је $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 < +\infty$, је сагласно теореми 1.10 Hilbert-ов простор са скаларним производом $\langle (z_n)_{n=1}^{\infty}, (w_n)_{n=1}^{\infty} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} z_n \overline{w}_n$.

Напомена 10.12. По аналогији са ознаком из првог примера, понекад ћемо приликом упоредног разматрања коначно и бесконачно димензионалних Hilbert-ових простора низова за $\boldsymbol{\ell}^2$ користити и ознаку $\mathbb{C}^\infty$.

Пример 10.3. За сваки простор с мером (Ω, μ) према теореми 5.10 простор $\boldsymbol{L}^2(\Omega, \mu)$ квадратно интеграбилних функција постаје Hilbert-ов простор када се у њега уведе скаларни производ са $\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f \overline{g}\, d\mu$, за свако $f, g \in \boldsymbol{L}^2(\Omega, \mu)$.

Видели смо да норма Hilbert-овог простора мора да задовољи и правило паралелограма, а следећа теорема говори да међу Banach-овим просторима ова особина карактерише управо оне који су Hilbert-ови.

Теорема 10.13. **[Jordan[4]-von Neumann[5]-а]** ***Ако у нормираном простору X важи правило паралелограма, тада је изразом***

$$\langle f, g \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \left\| f + i^k g \right\|^2 \qquad \text{\textbf{\textit{за све}}}\ f, g \in X, \tag{10.14}$$

дефинисан скаларни производ који индукује норму тог простора.

△ Приметимо одмах да је $\sqrt{\langle f, f \rangle} = \|f\|$, $\langle 0, f \rangle = 0$, као и

$$\langle \alpha f, \alpha g \rangle = |\alpha|^2 \langle f, g \rangle, \qquad \text{за све } f, g \in X \text{ и } \alpha \in \mathbb{C}. \tag{10.15}$$

Даље, примењујући правило паралелограма за све $f, g, h \in X$ добијамо да је

$$\begin{aligned}
&\langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|f+h\|^2 - \|f-h\|^2 - i\,\|f+ih\|^2 - i\,\|f-ih\|^2\big) \\
&+ \tfrac{1}{4}\big(\|g+h\|^2 - \|g-h\|^2 - i\,\|g+ih\|^2 - i\,\|g-ih\|^2\big) \\
&= \tfrac{1}{8}\big(\|f+g+2h\|^2 + \|f-g\|^2 - \|f+g-2h\|^2 - \|f-g\|^2\big) \\
&+ \tfrac{i}{8}\big(\|f+g+2ih\|^2 + \|f-g\|^2 - \|f+g-2ih\|^2 - \|f-g\|^2\big) = \tfrac{1}{2}\langle f+g, 2h \rangle.
\end{aligned} \tag{10.16}$$

[3]Хилберт– David Hilbert (1862–1943)
[4]Џордан– P. Jordan ( )
[5]фон Нојман– Johann (John) von Neumann (1903–1957)

Специјално за $g = 0$ закључујемо да важи

$$\langle f, h\rangle = \tfrac{1}{2}\langle f, 2h\rangle, \tag{10.17}$$

одакле, као и из (10.16), следи и да је

$$\langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle = \langle f+g, h\rangle. \tag{10.18}$$

Из (10.15), (10.17) и (10.18) закључујемо да је за свако $m, n \in \mathbb{N}$

$$\left\langle m2^{-n}f, g\right\rangle = m\left\langle 2^{-n}f, g\right\rangle = m2^{-2n}\left\langle f, 2^n g\right\rangle = m2^{-2n}2^n\langle f, g\rangle = m2^{-n}\langle f, g\rangle.$$

За сваки $\alpha > 0$ постоји низ $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ елемената скупа $\{m2^{-n} : m, n \in \mathbb{N}\}$ који конвергира ка α, па с обзиром да је

$$\left|\left\|\alpha_n f + i^k g\right\| - \left\|\alpha f + i^k g\right\|\right| \leq |\alpha_n - \alpha|\,\|f\|,$$

за све $k = 0, 1, 2, 3$, то важи $\lim_{n\to\infty}\left\|\alpha_n f + i^k g\right\| = \left\|\alpha f + i^k g\right\|$, што заједно са (10.14) даје $\lim_{n\to\infty}\langle\alpha_n f, g\rangle = \langle\alpha f, g\rangle$. Тако је

$$\langle\alpha f, g\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle\alpha_n f, g\rangle = \lim_{n\to\infty}\alpha_n\langle f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle, \tag{10.19}$$

а због

$$\langle -\alpha f, g\rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|\alpha f - g\|^2 - \|\alpha f + g\|^2 + i\,\|\alpha f - ig\|^2 - i\,\|\alpha f + ig\|^2\right) = -\langle\alpha f, g\rangle,$$

видимо да (10.19) важи и за негативне, дакле за све реалне α. Коначно, кад год је $z = \alpha + i\beta$ за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, онда имамо

$$\langle zf, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle + \beta\langle if, g\rangle =$$
$$\alpha\langle f, g\rangle + \tfrac{\beta}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k\left\|if + i^k g\right\|^2 = \alpha\langle f, g\rangle + \beta i\langle f, g\rangle = z\langle f, g\rangle_{\Phi}.$$

Тиме је доказана линеарност по првој промењљивој, а (одатле или) слично се показује и антилинеарност по другој промењљивој. □

<u>Вежбања 10.2.</u>

1. Нормиран векторски простор има норму која је индукована неким скаларним производом ако и само ако сви његови дводимензионални потпростори имају то својство.
2. Показати да је $\|f+g\| = \|f\| + \|g\|$ за неке $f, g \in H$ ако и само ако је $f = \alpha g$ за неко $\alpha > 0$.
3. Доказати да су на сваком Hilbert-овом простору норме ограничене Hermite-ске сесквилинеарне и њене придружене квадратне форме једнаке.
4. а) Banach-ови простори $\boldsymbol{\ell}^p$ и $\boldsymbol{L}^p(\Omega, \mu)$ нису Hilbert-ови простори ни за једно $1 \leq p \neq 2$.
   б) Ако је μ коначна мера, за свако $p > 2$ се у $\boldsymbol{L}^p(\Omega, \mu)$ могу увести унутрашњи производи
   $$\langle f, g\rangle \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega f\overline{g}\,d\mu \qquad \text{за свако } f, g \in \boldsymbol{L}^p(\Omega, \mu),$$
   (али несагласни са нормама тих простора), као и унутрашњи производ у $\boldsymbol{\ell}^p$ са
   $\langle z, w\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} z_n\overline{w_n}$ за све $z \overset{\text{def}}{=} (z_n)_{n=1}^{\infty}$ и $w \overset{\text{def}}{=} (w_n)_{n=1}^{\infty} \in \boldsymbol{\ell}^p$ при $1 \leq p < 2$.

5. Уколико је X унитаран простор са унутрашњим производом $\langle\cdot,\cdot\rangle$, а $\widetilde{X}$ његово комплетирање (у индукованој норми) по теореми 1.19, доказати да се онда и у $\widetilde{X}$ може увести унутрашњи производ са
$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\langle x_n,y_n\rangle \qquad \text{за све } \boldsymbol{x}\overset{\text{def}}{=}(x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ и } \boldsymbol{y}\overset{\text{def}}{=}(y_n)_{n=1}^{\infty}\in\widetilde{X},$$
будући да низ $\{\langle x_n,y_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира. Проверити и да $\langle\cdot,\cdot\rangle$ наслеђује тражене особине за скаларни производ.
6. Доказати претходно тврђење двоструком применом теореме 7.3 о продужењу ограниченог линеарног пресликавања.
7. Простор свих апсолутно непрекидних функција f на $[0,1]$ за које је $f'\in \boldsymbol{L}^2(0,1)$ је Hilbert-ов простор са скаларним производом
$$\langle f,g\rangle \overset{\text{def}}{=} f(0)\overline{g(0)}+\textstyle\int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}\,dx \qquad \text{за све } f,g\in \boldsymbol{AC}[0,1] \text{ са } f',g'\in\boldsymbol{L}^2(0,1).$$
8. У Hardy-јевом простору $\boldsymbol{H}^2(\mathbb{D})$ свих функција холоморфних у јединичном диску $\mathbb{D}$ за које је $\sup\limits_{r<1}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^2\,dt<+\infty$ важи

   а) $\lim_{r\to1-}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^2\,dt=\sup\limits_{r<1}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^2\,dt,$

   б) $\boldsymbol{H}^2(\mathbb{D})$ је Hilbert-ов простор при скаларном производу
$$\langle f,g\rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to1-}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\overline{g(re^{it})}\,dt \qquad \text{за све } f,g\in\boldsymbol{H}^2(\mathbb{D}).$$

   в) Ако су $f(z)\overset{\text{def}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ и $g(z)\overset{\text{def}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ степени развоји за функције $f,g\in\boldsymbol{H}^2(\mathbb{D})$, показати да је $\langle f,g\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\overline{b_n}$.
9. Bargmann[6]-Fock[7]-Segal[8]-ов простор $\boldsymbol{F}^2$ свих целих функција f за које је
$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}|f(x+iy)|^2\,e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy<+\infty$$
је Hilbert-ов простор са скаларним производом
$$\langle f,g\rangle \overset{\text{def}}{=} \iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} f(x+iy)\overline{g(x+iy)}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \qquad \text{за све } f,g\in\boldsymbol{F}^2.$$
10. а) Bergman[9]-ов простор $\boldsymbol{A}^2(\mathbb{D})$ свих комплексних функција f аналитичких унутар јединичног диска $\mathbb{D}$, за које је $\int_{\mathbb{D}}|f(x+iy)|^2\,dx\,dy<+\infty$, је Hilbert-ов простор са скаларним производом
$$\langle f,g\rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(x+iy)\overline{g(x+iy)}\,dx\,dy \qquad \text{за све } f,g\in\boldsymbol{A}^2(\mathbb{D})$$
(при чему је овде свеједно да ли се горњи интеграли посматрају као Lebesgue-ови, или пак као несвојствени Riemann-ови интеграли).

    б) Доказати да ако су $f(z)\overset{\text{def}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ и $g(z)\overset{\text{def}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n$ Taylor[10]-ови развоји функција из $\boldsymbol{A}^2(\mathbb{D})$ тада је $\langle f,g\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\overline{b_n}}{n+1}$.
11. а) За линеаран простор $\mathcal{L}$ свих функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}: x\mapsto\sum_{k=1}^{n}c_ke^{i\alpha_kx}$ за неке $c_n\in\mathbb{C}$ и $\alpha_k\in\mathbb{R}$ при свим $k=1,\dots,n$, изразом
$$\langle f,g\rangle \overset{\text{def}}{=} \lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad \text{за све } f,g\in\mathcal{L}$$
дат је један скаларни производ на $\mathcal{L}$.

---

[6] Баргман– Valentine Bargmann (1908–1989)
[7] Фок-– Vladimir Fock (1898–1974)
[8] Сегал– Irvin Ezra Segal (1918—1998)
[9] Бергман– Stefan Bergman (1895–1977)
[10] Тејлор– Brook Taylor (1685–1731)

б) Показати да се његовим комплетирањем добија један **несепарабилан** Hilbert-ов простор (простор **скоро периодичних** функција).

12. Нека је дат сепарабилан Hilbert-ов простор H и σ коначна мера μ на Ω. Простор $\boldsymbol{L}^2(\Omega,\mu,H)$ (класа еквиваленције $[\mu]$ с.с. једнаких) слабо мерљивих функција $f:\Omega\to H$ (тј. таквих да су све функције $w\mapsto\langle f(w),h\rangle$, за $h\in H$ мерљиве), за које је $\|f\|\in\boldsymbol{L}^2(\Omega,\mu)$, је Hilbert-ов простор са скаларним производом
$$\langle f,g\rangle \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \langle f(w),g(w)\rangle\,dw \qquad \text{за све } f,g\in\boldsymbol{L}^2(\Omega,\mu,H).$$

13. Hilbert-Schmidt-ов простор $\mathfrak{C}_2(\boldsymbol{\ell}^2)$ матрица $[a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$ са квадратно сумабилним елементима $\sum_{i,j=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<+\infty$ је Hilbert-ов простор са скаларним производом $\left\langle\!\!\left\langle [a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty},[b_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}\right\rangle\!\!\right\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1}^{\infty}a_{ij}\bar{b_{ij}}$ за све $[a_{ij}]_{i,j=1}^{\infty},[b_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}\in\mathfrak{C}_2(\boldsymbol{\ell}^2)$.

14. Ако су $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ Hilbert-ови простори са одговарајућим унутрашњим производима $\{\langle\cdot,\cdot\rangle_n\}_{n=1}^{\infty}$ и нормама $\{\|\cdot\|_n\}_{n=1}^{\infty}$, онда је њихова **ортогонална сума** $\bigoplus_{n=1}^{\infty}H_n$, тј. простор свих низова $f\overset{\text{def}}{=}(f_n)_{n=1}^{\infty}\in\prod_{n=1}^{\infty}H_n$ за које је $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_n^2<+\infty$, такође Hilbert-ов простор при скаларном производу
$$\langle f,g\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\langle f_n,g_n\rangle_n \qquad \text{за све } f,g\in\bigoplus_{n=1}^{\infty}H_n.$$

3. Ортогоналност у Hilbert-овом простору

У наставку текста ознака H ће нам увек бити резервисана за означавање Hilbert-ових простора.

На основу Cauchy-Schwarz-ове неједнакости знамо да за произвољне ненула векторе $f\overset{\text{def}}{=}(x_1,y_1,z_1)$ и $g\overset{\text{def}}{=}(x_2,y_2,z_2)$ у $\mathbb{R}^3$ важи
$$-1\le\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}=\frac{\langle f,g\rangle}{\|f\|\,\|g\|}\le 1.$$
Штавише, показује се да наведена величина представља управо косинус угла између вектора f и g, а $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$ услов њихове ортогоналности. За произвољан Hilbert-ов простор појам ортогоналности прецизира следећа

Дефиниција 10.7. *За векторе $f,g\in H$ каже се да су* ***ортогонални****, и то означава са $f\perp g$, уколико је $\langle f,g\rangle=0$.*

За скупове $F,G\subset H$ каже се да су ***ортогонални****, а означава са $F\perp G$, ако је $f\perp g$ за свако $f\in F$ и $g\in G$. Са $G^{\perp}$ означава се скуп свих $f\in H$ који су ортогонални на G и назива* ***ортокомплементом*** *или* ***ортогоналном допуном*** *од G (у H). Уколико је G баш потпростор од H, осим $G^{\perp}$ користи се још и ознака $H\ominus G$.*

Да избегнемо непотребно оптерећивање текста, знак $\mathbf{0}$ користићемо и за означавање нул-простора $\{0\}$.

Природно, важи следећи

Став 10.14. ***$\perp$ је симетрична релација са следећим особина:***

1° $\mathbf{0}^{\perp}=H, H^{\perp}=\mathbf{0}$,
2° ***за свако*** $F\subset H$ ***је*** $F^{\perp}$ ***затворен потпростор у*** H,
3° ***при*** $F\subset G$ ***је и*** $F^{\perp}\supset G^{\perp}$,

4° $F^{\perp} = (\mathfrak{Lin}\, F)^{\perp} = (\overline{\mathfrak{Lin}\, F})^{\perp}$.

△ 1° Докажимо дакле да је нул-вектор једини ортогоналан на цео H. Заиста, за свако $f \in H$ је $\langle f, 0 \rangle = 0$, а за $f \neq 0$ је и $\langle f, f \rangle > 0$, па такви f онда не могу ни бити ортогонални на H.

2° За $f \in F$ и $g, h \in F^{\perp}$ је при сваком $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\langle f, \alpha g + \beta h \rangle = \overline{\alpha}\, \langle f, g \rangle + \overline{\beta}\, \langle f, h \rangle = 0 + 0 = 0,$$

па је $\alpha g + \beta h \in F^{\perp}$. Дакле, $F^{\perp}$ је векторски потпростор у H, док његова затвореност следи из чињенице да је за конвергентан низ $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ вектора у $F^{\perp}$, због непрекидности скаларног производа, и

$$\Big\langle \lim_{n\to\infty} h_n, f \Big\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle h_n, f \rangle = 0 \qquad \text{за свако } f \in H,$$

тј. $\lim_{n\to\infty} h_n \in F^{\perp}$.

3° За $h \in G^{\perp}$ је $\langle g, h \rangle = 0$ за све $g \in G$, па самим тим и за све $g \in F$. Дакле $h \in F^{\perp}$, што показује да је $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

4° Из $F \subset \mathfrak{Lin}\, F \subset \overline{\mathfrak{Lin}\, F}$ следи да је $F^{\perp} \supset \mathfrak{Lin}\, F^{\perp} \supset \overline{\mathfrak{Lin}\, F}^{\perp}$, па ће бити довољно да се покаже да важи $F^{\perp} \subset \overline{\mathfrak{Lin}\, F}^{\perp}$. За свако $h \in F^{\perp}$ је $\langle f, h \rangle = 0$ за све $f \in F$, па је по линеарности $\langle f, h \rangle = 0$ и за све $f \in \mathfrak{Lin}\, F$. Даље, за $f \in \overline{\mathfrak{Lin}\, F}$ је $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ за неки низ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ у $\mathfrak{Lin}\, F$, па је по непрекидности

$$\langle f, h \rangle = \Big\langle \lim_{n\to\infty} f_n, h \Big\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, h \rangle = 0,$$

тј. $h \in \overline{\mathfrak{Lin}\, F}^{\perp}$, одакле коначно закључујемо да је и $F^{\perp} \subset \overline{\mathfrak{Lin}\, F}^{\perp}$. □

Дефиниција 10.8. *Систем или фамилија вектора* $\{f_i\}_{i\in I}$ *у Hilbert-овом простору назива се* ***ортогоналном*** *уколико је* $f_i \perp f_j$ *за све* $i \neq j$ *из* I.

За овакве векторе важи

Теорема 10.15. **[Питагорина[11] теорема]** ***За сваки коначан низ*** $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ ***ортогоналних вектора је***

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} f_n \Big\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|^2 .$$

△ Како директан рачун показује

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} f_n \Big\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|^2 + \sum_{\substack{m,n=1\\ m\neq n}}^{N} \langle f_m, f_n \rangle = \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|^2 . \qquad \square$$

Неопходне и довољне услове за ортогоналност два вектора даје

Лема 10.16. ***Вектори*** f ***и*** g ***из*** H ***су међусобно ортогонални онда и само онда кад је*** $\|f + \lambda g\| \geq \|f\|$ ***за свако*** $\lambda \in \mathbb{C}$.

[11] Питагора– *Πυθαγορας* (570–497 п.н.е)

$\triangle$ При $f \perp g$ је $\|f + \lambda g\| = \sqrt{\|f\|^2 + |\lambda|^2 \|g\|^2} \geq \|f\|$, за свако $\lambda \in \mathbb{C}$. За $g = 0$ очигледно да важи и супротна импликација, док за $g \neq 0$ из (10.7) и $\|f + \lambda g\| \geq \|f\|$ при $\lambda = -\frac{\langle f,g \rangle}{\langle g,g \rangle}$ имамо

$$\|f\|^2 - \tfrac{|\langle f,g\rangle|^2}{\langle g,g\rangle} = \|f\|^2 - 2\mathfrak{Re}\langle f, \tfrac{\langle f,g\rangle}{\langle g,g\rangle} g\rangle + \big\|\tfrac{\langle f,g\rangle}{\langle g,g\rangle} g\big\|^2 = \big\|f - \tfrac{\langle f,g\rangle}{\langle g,g\rangle} g\big\|^2 \geq \|f\|^2 .$$

Одатле закључујемо да мора бити $\langle f, g \rangle = 0$, тј. $f \perp g$. $\square$

Како је скаларни производ специфичност управо Hilbert-овог простора у односу на све остале Banach-ове просторе, то се поставља питање да ли и у Banach-овим просторима постоје аналогони ортогоналности. Једна од најшире прихваћених дефиниција је такозвана ортогоналност по Birkhoff[12] -James[13]-у из [**J**], конципирана управо по моделу претходне леме.

ДЕФИНИЦИЈА 10.9. *За вектор f каже се да је* ***ортогоналан по Birkhoff-James-у*** *на вектор g у истом Banach-овом простору X ако је $\|f + \lambda g\| \geq \|f\|$ за свако $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Подсетимо се да се подскуп F векторског простора назива **конвексним** ако је $(1-\alpha)f + \alpha g \in F$ за свако $\alpha \in [0,1]$ и $f, g \in F$. Сви векторски потпростори датог простора очигледно јесу примери конвексних скупова. Наредну теорему наводимо у следећем прилично уобичајеном облику, и поред тога што је у наставку излагања нећемо користити у пуној њеној општости.

ТЕОРЕМА 10.17. [о најближем елементу] ***Нека је F неӣразан, зашворен и конвексан ӣодскуӣ у H. Тада за сваки $h \in H$ ӣосшоји шачно један $f \in F$ за који је***

$$\|f - h\| = \operatorname{dist}(h, F) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{g \in F} \|g - h\| .$$

$\triangle$ Како постоји низ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ у F за који је $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - h\| = \operatorname{dist}(h, F)$, то је према правилу паралелограма

$$\begin{aligned}\|f_m - f_n\|^2 &= 2\|f_m - h\|^2 + 2\|f_n - h\|^2 - 4\Big\|\frac{f_m + f_n}{2} - h\Big\|^2 \\ &\leq 2\|f_m - h\|^2 + 2\|f_n - h\|^2 - 4\operatorname{dist}(h,F)^2, \qquad (10.20)\end{aligned}$$

јер је и $\frac{f_m + f_n}{2} \in F$ због конвексности F. Како последњи израз у (10.20) тежи нули кад $m, n \to \infty$, то закључујемо да је $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-ев низ, који због комплетности H конвергира, па постоји $f \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n$. Како је F затворен, то је и $f \in F$, а на основу непрекидности норме закључујемо да је

$$\|f - h\| = \big\|\lim_{n\to\infty} f_n - h\big\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n - h\| = \operatorname{dist}(h, F).$$

У циљу доказивања јединствености најближег елемента, размотримо ситуацију која би наступила постојањем још једног $g \in H$ истих особина. По правилу

[12] Бирхоф– Garett Birkhoff (1911-1996)

[13] Џејмс– Robert Clarcke James (1918–)

паралелограма у таквом случају би било

$$\begin{aligned}\|f-g\|^2 &= 2\|f-h\|^2 + 2\|g-h\|^2 - 4\left\|\frac{f+g}{2}-h\right\|^2 \\ &= 4\mathrm{dist}^2(h,F) - 4\left\|\frac{f+g}{2}-h\right\|^2 \le 0,\end{aligned}$$

с обзиром да је $\frac{f+g}{2} \in F$. Одатле непосредно следи да је $f = g$, што је и требало доказати. $\square$

Теорема 10.18. **[о ортогоналној пројекцији]** ***Уколико је*** L ***йошйросшор Hilbert-овоī йросшора*** H, ***шада се сваки*** $h \in H$ ***једнозначно йредсшавља у облику***

$$h = f + g, \qquad \textbf{\textit{за неко}}\ f \in L\ \textbf{\textit{и неко}}\ g \in H \ominus L, \tag{10.21}$$

шакво да је $\|g\| = \mathrm{dist}(h, L)$.

$\triangle$ Према претходној теореми 10.17 међу елементима L постоји онај f који је најближи h, односно $\|h-f\| = \mathrm{dist}(h,L)$. Тако за све $f' \in L$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ вектор $f - \lambda f' \in L$ не може бити ближи h неголи сам f, то је

$$\|h - f + \lambda f'\| = \|h - (f - \lambda f')\| \ge \|h - f\| \qquad \text{за свако } \lambda \in \mathbb{C},$$

што према леми 10.16 значи да мора бити $g \overset{\mathrm{def}}{=} h - f \perp f'$, обезбеђујући тражено ортогонално разлагање $h = f + g$, при чему је очигледно $\|g\| = \mathrm{dist}(h,L)$.

Кад би за још неко $f' \in L$ било $h - f' \perp L$, било би и $f - f' = (h-f') - (h-f) \perp L$. С обзиром на $f, f' \in L$, онда је и $f - f' \in L$, те је $\langle f-f', f-f'\rangle = 0$. Дакле $f = f'$, па је представљање у облику (10.21) јединствено. $\square$

Следеће тврђење је на одређен начин комплементарно са тачком 4° става 10.14.

Став 10.19. ***За сваки йодскуй*** F ***у*** H ***је*** $F^{\perp\perp} = \overline{\mathfrak{Lin}\, F}$, ***а*** $\overline{\mathfrak{Lin}\, F} = H$ ***је шачно онда кад је*** $F^{\perp} = 0$.

$\triangle$ Како $F \subset F^{\perp\perp}$ следи непосредно из дефиниције ортокомплемента, а сагласно 2° става 10.14 је $F^{\perp\perp}$ потпростор од H, то закључујемо $\mathfrak{Lin}\, F \subset F^{\perp\perp}$, као и $\overline{\mathfrak{Lin}\, F} \subset F^{\perp\perp}$.

За доказивање обрнуте инклузије размотримо било који $h \in F^{\perp\perp}$ и у складу са теоремом 10.18 нека је $h = f + g$, његово ортогонално разлагање на компоненте $f \in \overline{\mathfrak{Lin}\, F}$ и $g \in \overline{\mathfrak{Lin}\, F}^{\perp}$. Према тачки 4° става 10.14 је $g \in F^{\perp}$, па је због $h \in F^{\perp\perp}$ и $\langle h, g\rangle = 0$. Због међусобне ортогоналности f и g је онда $\langle f, g\rangle = 0$, па дакле и $\langle g, g\rangle = \langle h-f, g\rangle = \langle h, g\rangle - \langle f, g\rangle = 0 - 0 = 0$. Значи $g = 0$, па је $h = f \in \overline{\mathfrak{Lin}\, F}$, чиме је показано да је $F^{\perp\perp} \subset \overline{\mathfrak{Lin}\, F}$.

Сад је јасно да је $\overline{\mathfrak{Lin}\, F} = H$ тачно онда када је $F^{\perp\perp} = H$, дакле уколико је $h \perp F^{\perp}$ за свако $h \in H$, односно $H \perp F^{\perp}$. Како је ортогоналност на цео H резервисана искључиво за нул вектор, ово нам омогућава да закључимо да је $\overline{\mathfrak{Lin}\, F} = H$ онда и само онда кад је $F^{\perp} = 0$. $\square$

Навешћемо и једну експлицитну формулу за растојање вектора до датог коначно димензионалног потпростора. У њеној формулацију користимо појам **Gram**[14]**-ове детерминанте** или **Gram-ијана**, означен са $\Gamma_n(f_1, f_2, \cdots, f_n)$, тј. детерминанту **Gram-ове матрице** $G_n(f_1, f_2, \ldots, f_n) \stackrel{\text{def}}{=} [\langle f_k, f_l\rangle]_{k,l=1}^n$ за низ вектора $f_1, f_2, \cdots, f_n$ из H. Дакле

$$\Gamma_n(f_1, f_2, \cdots, f_n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle & \ldots & \langle f_1, f_n\rangle \\ \langle f_2, f_1\rangle & \langle f_2, f_2\rangle & \ldots & \langle f_2, f_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_n, f_1\rangle & \langle f_n, f_2\rangle & \ldots & \langle f_n, f_n\rangle \end{vmatrix}.$$

Лема 10.20. ***Вектори*** $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ ***из*** H ***су линеарно независни ако и само ако је*** $\Gamma_n(f_1, f_2, \cdots, f_n) > 0$***, када за свако*** $f_{n+1} \in H$ ***важи***

$$\operatorname{dist}\Big(f_{n+1}, \underset{1\le k\le n}{\mathfrak{Lin}} f_k\Big) = \frac{\sqrt{\Gamma_{n+1}(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1})}}{\sqrt{\Gamma_n(f_1, f_2, \cdots, f_n)}}. \tag{10.22}$$

$\triangle$ Будући коначне димензије, $L = \underset{1\le k\le n}{\mathfrak{Lin}} f_k$ је затворен потпростор, па је по пројекционој теореми 10.18 $f_{n+1} = f + g$ за неке $f \in L$ и $g \in H \ominus L$, и уз то је $\|g\| = \operatorname{dist}(f_{n+1}, L)$. Како је $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k$ за неке $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, то због $f_{n+1} - f = g \in H \ominus L$ имамо

$$\sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k}\, \langle f_l, f_k\rangle - \langle f_l, f_{n+1}\rangle = \langle f_l, f - f_{n+1}\rangle = 0 \quad \text{за све } l = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.23}$$

Како је

$$\sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k}\, \langle f_{n+1}, f_k\rangle - \langle f_{n+1}, f_{n+1}\rangle + \|g\|^2 = \langle f_{n+1}, f\rangle - \|f\|^2 = \langle f_{n+1} - f, f\rangle = 0, \tag{10.24}$$

то (10.23) и (10.24) дају хомоген систем од $n+1$ линеарне једначине који има нетривијално решење $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \cdots, \overline{\alpha}_n, -1$. Због тога је детерминанта тог система једнака нули, тј.

$$\begin{vmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle & \ldots & \langle f_1, f_{n+1}\rangle \\ \langle f_2, f_1\rangle & \langle f_2, f_2\rangle & \ldots & \langle f_2, f_{n+1}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_{n+1}, f_1\rangle & \langle f_{n+1}, f_2\rangle & \ldots & \langle f_{n+1}, f_{n+1}\rangle - \|g\|^2 \end{vmatrix} = 0,$$

одакле (на пример, разлагањем последње колоне) добијамо

$$\Gamma_{n+1}(f_1, f_2, \cdots, f_{n+1}) - \|g\|^2\, \Gamma_n(f_1, f_2, \cdots, f_n) = 0.$$

Одавде рачунањем траженог растојања $\|g\|$ добијамо формулу (10.22).

Индукцијом се из (10.22) лако показује да је $\Gamma_n(f_1, f_2, \cdots, f_n) > 0$ ако је $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ линеарно независан, док се чињеница да је $\Gamma_n(f_1, f_2, \cdots, f_n) = 0$ за линеарно зависнан скуп $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ проверава директно. $\square$

[14] Грам– Jørgen Pedersen Gram (1850–1916)

Вежбања 10.3.

1. Доказати да је $F^{\perp\perp\perp} = F^{\perp}$ за свако $F \subset \mathcal{H}$.
2. Нека је $-\infty \le a < c < b \le \infty$ и нека су
$$\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \boldsymbol{L}^2(a,b) : f = 0 \text{ скоро свуда на } (c,b)\}$$
$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \boldsymbol{L}^2(a,b) : f = 0 \text{ скоро свуда на } (a,c)\}.$$
Доказати да су $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ међусобно ортокомплементарни затворени потпростори у $\boldsymbol{L}^2(a,b)$, а да $\chi_{(a,c)}f$ и $\chi_{(b,c)}f$ представљају ортогоналне компоненте дате функције $f \in \boldsymbol{L}^2(a,b)$ у $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ редом.
3. За σ коначну меру μ, разлагање $X = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} X_n$ простора X на мерљиве подскупове X_n такве да је $0 < \mu(X_n) < +\infty$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и дату функцију $f \in \boldsymbol{L}^2(X,\mu)$ наћи $\displaystyle\inf_{(c_n)_{n=1}^{\infty}} \int_X \Big| f - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_{X_n} \Big|^2 d\mu$, где се инфимум узима по свим низовима у $\mathbb{C}$. Да ли се овај инфимум у ствари минимум, који се достиже на неком од низова $(c_n)_{n=1}^{\infty}$?
4. Показати да су
$$\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \big\{f \in \boldsymbol{L}^2(-a,a) : f(-x) = f(x) \quad \text{за све}\, x \in (-a,a)\big\} \text{ (парне функције) и}$$
$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \big\{f \in \boldsymbol{L}^2(-a,a) : f(-x) = -f(x) \quad \text{за све}\, x \in (-a,a)\big\} \text{ (непарне функције)}$$
међусобно ортокомплементарни затворени потпростори у $\boldsymbol{L}^2(-a,a)$, као и да су
$$f_{\mathcal{K}} : (-a,a) \to \mathbb{C} : x \mapsto \tfrac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad \text{и} \qquad f_{\mathcal{L}} : (-a,a) \to \mathbb{C} : x \mapsto \tfrac{f(x)-f(-x)}{2}$$
ортогоналне компоненте дате функције $f \in \boldsymbol{L}^2(-a,a)$ у $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ респективно.
5. Наћи $\min_{P \in \mathfrak{P}_n} \int_0^1 |P(x)|^2\,dx$, ако $\mathfrak{P}_n$ означава фамилију полинома степена n са јединичним коефицијентом уз члан n-тог степена.
6. Израчунати:
   а) $\displaystyle\min_{a,b,c \in \mathbb{C}} \int_0^{\infty} \big|a + bx + cx^2 + x^3\big|^2 e^{-x}\,dx$,
   б) $\displaystyle\max_{g} \int_0^{\infty} x^3 g(x) e^{-x}\,dx$,
   ако се максимум узима по свим функијама g за које је $\int_0^{\infty} |g(x)|^2 e^{-x}\,dx = 1$, као и $\int_0^{\infty} g(x)e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} xg(x)e^{-x}\,dx = \int_0^{\infty} x^2 g(x)e^{-x}\,dx = 0$.
7. Доказати да су потпростори апсолутно непрекидних, односно сингуларних мера у односу на дату позитивну меру ортогонални по Birkhoff-James-у потпростори од $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{M}}$.
8. Ако је $A \cap B = \emptyset$ за неке $A, B \subset X$, доказати да су $\boldsymbol{L}^p(A,\mu)$ и $\boldsymbol{L}^p(B,\mu)$ међусобно ортогонални по Birkhoff-James-у потпростори од $\boldsymbol{L}^p(X,\mu)$ за свако $p \ge 1$.
9. Доказати да су за сваке две узајамно сингуларне Borel-ове мере μ и ν на $\mathbb{R}$ Hilbert-ови простори $\boldsymbol{L}^2(\mu+\nu)$ и $\boldsymbol{L}^2(\mu) \oplus \boldsymbol{L}^2(\nu)$ изоморфни.
10. Показати да је ортопројектовање на **потпростор** $\boldsymbol{A}^2(\mathbb{D})$ простора $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{D})$ дато формулом
$$Pf(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1 - z\overline{w})^2}\,dw \qquad \text{за све } f \in \boldsymbol{A}^2(\mathbb{D}) \text{ и све } z \in \mathbb{D}.$$
11. Показати да је ортогонално пројектовање на Bargmann-Fock-Segal-ов простор $\boldsymbol{F}^2$, иначе **затворен** потпростор од $\boldsymbol{L}^2\big(\mathbb{R}^2, \frac{1}{\pi}e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\big)$, дато са
$$Pf(x+iy) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{(u-iv)(x+iy)} f(u+iv) e^{-u^2-v^2} du\,dv \quad \text{за све } f \in \boldsymbol{F}^2 \text{ и све } x,y \in \mathbb{R}.$$

4. Ортонормирани системи

Дефиниција 10.10. *Сваки ортогоналан систем јединичних вектора* $\{f_i\}_{i\in I}$ *назива се још и* **ортонормираним системом** *(О.Н.С.).*

Теорема 10.21. **[Gram-Schmidt[15]-ов- поступак ортогонализације]** ***За сваки низ*** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***линеарно независних вектора постоји ортонормиран систем*** $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***код кога је*** $\mathfrak{Lin}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\} = \mathfrak{Lin}\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ ***за свако*** $n\in\mathbb{N}$.

$\triangle$ Сам поступак дефинише се индуктивно. Узмимо прво $e_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_1}{\|f_1\|}$ и претпоставимо да за неко $n\in\mathbb{N}$ имамо ортонормиране $e_1,e_2,\cdots,e_n$ за које је $\mathfrak{Lin}\{e_1,e_2,\cdots,e_k\} = \mathfrak{Lin}\{f_1,f_2,\cdots,f_k\}$ за све $k=1,2,\ldots,n$. Како притом $f_{n+1}\notin \mathfrak{Lin}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\} = \mathfrak{Lin}\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$, одакле закључујемо да је $g_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\langle f_{n+1},e_k\rangle e_k \neq 0$, па узимамо $e_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g_{n+1}}{\|g_{n+1}\|}$. Непосредно се проверава да је $\mathfrak{Lin}\{e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}\} = \mathfrak{Lin}\{f_1,f_2,\cdots,f_{n+1}\}$, као и да је $e_{n+1}\perp\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$, чиме се реализује индукцијски корак. Вектори e_n могу се и експлицитно изразити формулама

$$e_n = \frac{\begin{vmatrix} \langle f_1,f_1\rangle & \ldots & \langle f_1,f_{n-1}\rangle & f_1 \\ \langle f_2,f_1\rangle & \ldots & \langle f_2,f_{n-1}\rangle & f_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle f_n,f_1\rangle & \ldots & \langle f_n,f_{n-1}\rangle & f_n \end{vmatrix}}{\sqrt{\Gamma_{n-1}(f_1,f_2,\cdots,f_{n-1})}\sqrt{\Gamma_n(f_1,f_2,\cdots,f_n)}}, \qquad \text{за свако } n\geq 2. \quad \square$$

Претходно изложена процедура назива се **Gram-Schmidt-ов поступак ортогонализације**.

Како за детерминанту

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & c \end{vmatrix}$$

важи рекурентна формула $\Delta_{n+1} = \Delta_n - a_n b_n$, одатле закључујемо да је $\Delta_{n+1} = c - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ за свако $n\geq 1$. На основу тога можемо да закључимо да у случају да је $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ већ ортонормиран, то лема 10.20 показује да је растојање f_{n+1} до $\mathfrak{Lin}\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ у овом случају

$$\sqrt{\Gamma_{n+1}(f_1,\ldots,f_{n+1})} = \sqrt{\|f_{n+1}\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle f_{n+1},f_k\rangle|^2} = \Big\| f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\langle f_{n+1},f_k\rangle f_k \Big\|.$$

Тако је од свих елемената у $\mathfrak{Lin}\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ управо $\sum_{k=1}^{n}\langle f_{n+1},f_k\rangle f_k$ онај који је најближи f_{n+1}. Нешто прецизнији одговор даје следећа

[15] Шмит– Erhard Schmidt (1876–1959)

Лема 10.22. ***Растојање вектора** f **до елемента** $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$ **линеала над ортонормираним системом** $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ **је***

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| = \sqrt{\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \langle f, e_k\rangle|^2},$$

$\sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k$ ***је ортопројекција** f **на** $\mathfrak{Lin}\,\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ **и важи***

$$\operatorname{dist}(f, \mathfrak{Lin}\,\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}) = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \right\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2}.$$

$\triangle$ Директно проверавамо да је $f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \perp e_k$ за све $k = 1, 2, \ldots, n$, па двострука примена Питагорине теореме даје

$$\begin{aligned} &\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \langle f, e_k\rangle) e_k \right\|^2 = \\ &\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \langle f, e_k\rangle|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - \langle f, e_k\rangle|^2, \end{aligned} \tag{10.25}$$

одакле произилазе сви тражени закључци. $\square$

Дефиниција 10.11. *За највише пребројив О.Н.С.* $\{e_i\}_{i\in I}$ *скалари* $\langle f, e_i\rangle$ *називају се* ***Fourier[16]-овим коефицијентима***, *а* $\sum_{i\in I} \langle f, e_i\rangle e_i$ ***Fourier-ов ред*** *вектора* f.

Теорема 10.23. **[Bessel[17]-ова-ова неједнакост]** ***За сваки О.Н.С.*** $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***важи***

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2 \le \|f\|^2, \qquad \text{за свако } f \in H.} \tag{10.26}$$

Fourier-ов ред $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n\rangle e_n$ ***вектора** f **јако конвергира и важи***

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n\rangle e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2 = \|f\|^2 - \left\| f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n\rangle e_n \right\|^2. \tag{10.27}$$

$\triangle$ Како је

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \|f\|^2 - \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \right\|^2 = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \right\|^2 \ge 0,$$

одакле следи

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 \le \|f\|^2 \qquad \text{за свако } n \in \mathbb{N}. \tag{10.28}$$

[16] Фурије– Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)
[17] Бесел– Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846)

То је довољно да ред $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2$ конвергира, па је низ његових парцијалних сума Cauchy-ев низ. Међутим, за све $m > n$ је

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} \langle f, e_k\rangle e_k - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k\right\|^2 = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} \langle f, e_k\rangle e_k\right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\langle f, e_k\rangle|^2 \to 0$$

кад $m, n \to \infty$, па је и низ парцијаних сума $\{\sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k\}_{n=1}^{\infty}$ Fourier-овог реда Cauchy-ев, те због комплетности Hilbert-ових простора конвергира. Дакле, Fourier-ов ред сваког елемента Hilbert-овог простора конвергира, што нам због непрекидности норме омогућава и гранични прелаз у првом делу једнакости (10.28), дајући коначно

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \|f\|^2 - \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k\right\|^2 = \left\|f - \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k\right\|^2. \qquad \square$$

У наставку ћемо се позабавити условима под којим Fourier-ов ред конвергира управо елементу од кога је формиран.

Теорема 10.24. [Parseval[18]-a] ***За сваки ортонормиран систем $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ у H и свако $f \in H$ следећи услови су међусобно еквивалентни:***

1° $f \in \overline{\mathfrak{Lin}_{n\geq 1}\, e_n}$,

2° $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2$, (Parseval-ова једнакост)

3° $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n\rangle e_n$.

△ (1° $\Longrightarrow$ 2°) Ако је $f \in \overline{\mathfrak{Lin}_{n\geq 1}\, e_n}$, то за дато $\varepsilon > 0$, постоји $n \in \mathbb{N}$ и неки $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ за које је $\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\| < \varepsilon$. Према леми 10.22 тим пре ће важити

$$\begin{aligned}\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 &\leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 \\ &= \left\|f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k\right\|^2 \leq \left\|f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\|^2 < \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Како је то задовољено за свако $\varepsilon > 0$, тиме је $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2$.

(2°$\Longrightarrow$3°) произилази директно из чињенице да

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k\right\|^2 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \to 0 \qquad \text{кад } n \to \infty.$$

(3°$\Longrightarrow$1°). Како је $\sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \in \mathfrak{Lin}_{1\leq k\leq n}\, e_n \subset \overline{\mathfrak{Lin}_{n\geq 1}\, e_n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, то је због затворености последњег простора $f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \in \overline{\mathfrak{Lin}_{n\geq 1}\, e_n}$. $\square$

Дефиниција 10.12. *Систем вектора $\{e_i\}_{i\in I}$ назива се* ***потпуним*** *ако је нул вектор једини ортогоналан на све њих, тј., при $\langle f, e_i\rangle = 0$ за свако $i \in I$ је неминовно $f = 0$. Потпуни ортонормирани системи (П.О.Н.С.) називају се*

[18]Парсевал-Marc-Antoine Parseval de Chênes(1755-1836)

још (из разлога који ће убрзо постати јаснији) и ***ортонормираним базама*** *(О.Н.Б.) Hilbert-овог простора H.*

Задовољење Parseval-ове једнакости за **све** векторе простора описује

Теорема 10.25. ***За сваки ортормиран систем*** $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***у*** H ***следећи услови су међусобно еквивалентни:***

1° $H = \overline{\mathfrak{Lin}_{n\geq 1}\, e_n}$,	(фундаменталност)
2° $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$	***је потпун,***
3° $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n\rangle\, e_n$	***за свако*** $f \in H$,
4° $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lvert\langle f, e_n\rangle\rvert^2$	***за свако*** $f \in H$,
5° $\langle f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n\rangle\, \overline{\langle g, e_n\rangle}$	***за свако*** $f, g \in H$.

△ Из претходне теореме одмах произилази да ($1° \Longrightarrow 4° \Longrightarrow 3°$). Даље, из непрекидности скаларног призвода имамо да је

$$\langle f, g\rangle = \Big\langle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle\, e_k,\, \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n} \langle g, e_l\rangle\, e_l \Big\rangle$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k,l=1}^{n} \langle f, e_k\rangle\, \overline{\langle g, e_l\rangle}\, \langle e_k, e_l\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle\, \overline{\langle g, e_k\rangle},$$

тако да је задовољено и ($3° \Longrightarrow 5°$).

Да ($5° \Longrightarrow 2°$) видимо по томе што из $\langle f, e_n\rangle = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$ одмах произилази да је $\langle f, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n\rangle\, \overline{\langle f, e_n\rangle} = 0$, односно $f = 0$.

За доказ ($2° \Longrightarrow 1°$) претпоставимо супротно да $L = \overline{\mathfrak{Lin}_{n\geq 1}\, e_n}$ није цео H, те изаберимо $0 \neq h \in H \setminus L$. По пројекционој теореми је $h = f + g$ за неко $f \in L$ и $0 \neq g \in L^{\perp}$. Тако је $\langle g, e_n\rangle = 0$ за све $n \in \mathbb{N}$, што искључује могућност да $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ буде потпун. Дакле ($\neg 1° \Longrightarrow \neg 2°$), што затвара еквиваленцијски круг. □

На крају овог одељка наводимо пример начина формирања ортонормираних база у директном производу простора.

Теорема 10.26. ***Ако су*** $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ ***и*** $\{f_l\}_{l=1}^{\infty}$ ***две ортонормиране базе простора*** $\boldsymbol{L}^2(M, \mu)$ ***и*** $\boldsymbol{L}^2(N, \nu)$ ***редом, тада је са*** $g_{k,l}(x, y) \overset{\text{def}}{=} e_k(x) f_l(y)$ ***за свако*** $x \in M, y \in N$, ***задата једна ортонормирана база*** $\{g_{k,l}\}_{k,l=1}^{\infty}$ ***простора*** $\boldsymbol{L}^2(M \times N, \mu\times\nu)$.

△ Непосредном провером утврђује се да је $\{g_{k,l}\}_{k,l=1}^{\infty}$ ортонормиран систем у $\boldsymbol{L}^2(M \times N, \mu\times\nu)$. Ради утврђивања потпуности овог система размотримо $h \in \boldsymbol{L}^2(M \times N, \mu \times \nu)$ ортогоналну на све $g_{k,l}$. За свако $x \in M$ означимо са h_x функцију засека h по x одређену са $h_x(y) \overset{\text{def}}{=} h(x, y)$. Према Fubini-јевој теореми $h_x \in \boldsymbol{L}^2(N, \nu)$ за $[\mu]$ скоро свуда, тј. за све $x \in M \setminus M_0$, где $\mu(M_0) = 0$. На основу теореме 4.29 Fubini-ја и теореме 10.24 Parseval-а за $\boldsymbol{L}^2(N,\nu)$, добијамо

$$\begin{aligned}\|h\|^2 &= \int_M\int_N |h(x,y)|^2\,d\nu(y)d\mu(x) = \int_M \|h_x\|^2\,d\mu(x) = \int_M \sum_{l=1}^{\infty} |\langle h_x, f_l\rangle|^2\,d\mu(x) \\ &= \int_M \sum_{l=1}^{\infty}\Big|\int_N h(x,y)\overline{f_l(y)}\,d\nu(y)\Big|^2 d\mu(x) = \sum_{l=1}^{\infty}\int_M\Big|\int_N h(x,y)\overline{f_l(y)}\,d\nu(y)\Big|^2 d\mu(x).\end{aligned} \tag{10.29}$$

За свако $x \in M \setminus M_0$ и свако $l \in \mathbb{N}$ је $I_l(x) \overset{\text{def}}{=} \langle h_x, f_l\rangle = \int_N h(x,y)\overline{f_l(y)}\,d\nu(y)$ такође у $\boldsymbol{L}^2(N,\nu)$, па поновна примена Parseval-ове, а на крају и Fubini-јеве једнакости даје

$$\begin{aligned}&\int_M\Big|\int_N h(x,y)\overline{f_l(y)}\,d\nu(y)\Big|^2\,d\mu(x) = \|I_l\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle I_l, e_k\rangle|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big|\int_M I_l(x)\overline{e_k(x)}\,d\mu(x)\Big|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\Big|\int_M\int_N h(x,y)\overline{e_k(x)f_l(y)}\,d\mu(x)\,d\nu(y)\Big|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\Big|\int_{M\times N} h(x,y)\overline{g_{k,l}(x,y)}\,d\mu(x)\,d\nu(y)\Big|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle h, g_{k,l}\rangle|^2 = 0.\end{aligned}$$

С обзиром на (10.29) онда је $\|h\| = 0$, тако да је $h = 0$ једина функција у $\boldsymbol{L}^2(M\times N, \mu\times\nu)$ ортогонална на све $g_{k,l}$, што употпуњује доказ теореме. □

4.1. Ортогонална димензија Hilbert-овог простора. Разматрање ове особине ограничићемо надаље само на сепарабилне Hilbert-ове просторе, будући да ћемо само са таквим просторима и радити.

Теорема 10.27. ***Сваки сепарабилан Hilbert-ов простор поседује ортонормирану базу, а све његове ортонормиране базе имају исту кардиналност.***

△ Пошто је ово у Линеарној алгебри добро позната особина код коначно димензионалних простора, размотрићемо само случај кад је дати Hilbert-ов простор без коначних база. Како сепарабилан Hilbert-ов простор H поседује бар један потпун систем вектора $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, онда одстранивши из њега све оне векторе који су изразиви као линеарна комбинација претходећих чланова низа и примењујући Gram-Schmidt-ов поступак ортогонализације на преостали низ долазимо до једног ортонормираног и очигледно пребројивог система $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, који будући и сам потпун, представља О.Н.Б. простора H.

Размотримо ли сад произвољну (јасно не коначну) О.Н.Б. $\{g_i\}_{i\in I}$, онда за свако $n \in \mathbb{N}$ можемо у индексном скупу I уочити највише пребројив подскуп индекса $I_n \subset I$, одабран такав да је $e_n \in \overline{\mathfrak{Lin}_{i\in I_n} g_i}$. Одатле закључујемо да је $H = \overline{\mathfrak{Lin}_{n\geq 1} e_n} \subset \overline{\mathfrak{Lin}_{i\in\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} g_i}$, као и да је последња инклузија у ствари једнакост. Како би морало бити $\operatorname{dist}\big(g_i, \overline{\mathfrak{Lin}_{i\in\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n} g_i}\big) = 1$ за свако евентуално $i \in I\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, оваква контрадикција указује на то да је $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ и сам пребројив. □

Дефиниција 10.13. *Заједничка кардиналност свих ортонормираних база сепарабилног Hilbert-овог простора H назива се* **ортогоналном димензијом** *тог простора и означава са* $\dim H$.

Дакле, ортогонална димензија сепарабилних Hilbert-ових простора је или коначна или пребројива, што ће у наставку текста свуда бити подразумевано.

Теорема 10.28. ***Два сепарабилна Hilbert-ова простора H и K су изометрички изоморфна ако и само ако је $d \overset{\text{def}}{=} \dim H = \dim K$. Под наведеним условима за сваке две О.Н.Б. $\{e_n\}_{n=1}^d$ и $\{f_n\}_{n=1}^d$ простора H и K редом постоји јединствен изометрички изоморфизам U ових простора за који је $Ue_n = f_n$ за свако $1 \le n \le d$.***

$\triangle$ Изометрички изоморфизам чува линеарну (не)зависност вектора, па је $\dim H = \dim K$ за изометрички изоморфне просторе H и K. Да важи и обрат, размотрићемо само случај $d \overset{\text{def}}{=} \dim H = \dim K = +\infty$, када имамо базе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ у H и $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ у K. За пресликавање $U : \underset{n\ge1}{\mathfrak{Lin}}\, e_n \to \underset{n\ge1}{\mathfrak{Lin}}\, f_n$ дефинисано са $U(\sum_{k=1}^n c_k e_k) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n c_k f_k$ за све $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{C}$, директно се проверава да је и линеарно и изометрично. Сагласно ставу 7.3 оно се једнозначно проширује до (такође) изометрије простора $H = \overline{\underset{n\ge1}{\mathfrak{Lin}}\, e_n}$ и $K = \overline{\underset{n\ge1}{\mathfrak{Lin}}\, f_n}$. $\square$

Теорема 10.29. ***Сваки комплексан сепарабилан Hilbert-ов простор H димензије d изометрички је изоморфан простору $\mathbb{C}^d$.***

$\triangle$ Према теореми 10.27 H има неку ортонормирану базу $\{e_n\}_{n=1}^d$. Уколико дефинишемо $U : H \to \mathbb{C}^d : f \mapsto (\langle f, e_n\rangle)_{n=1}^d$, тада је на основу Parseval-ове једнакости

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{n=1}^d |\langle f, e_n\rangle|^2} = \left\|\left(\langle f, e_n\rangle\right)_{n=1}^d\right\|_{\mathbb{C}^d} = \|Uf\|_{\mathbb{C}^d}\,,$$

па U јесте изометрија датих Hilbert-ових простора. Линеарност се проверава непосредно, док за дати $\{c_n\}_{n=1}^d \in \mathbb{C}^d$ (евентуални) ред $\sum_{n=1}^d c_n e_n$ на основу изометричности U конвергира неком $h \in H$, за кога очигледно важи

$$\langle h, e_n\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^d c_n e_n, e_n \right\rangle = c_n \qquad \text{за свако } 1 \le n \le d.$$

Стога је U и сурјективно, што комплетира доказ теореме. $\square$

За конкретне бесконачно димензионалне сепарабилне Hilbert-ове просторе $\boldsymbol{L}^2(a,b)$ и $\boldsymbol{\ell}^2 = \mathbb{C}^\infty$, из претходне теореме директно закључујемо да важи

Став 10.30. [Riesz-Fischer-a] ***За сваки низ $(x_n)_{n=1}^\infty \in \boldsymbol{\ell}^2$ и за сваку О.Н.Б. $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ у $\boldsymbol{L}^2(a,b)$ постоји јединствена функција $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}^2(a,b)$ чији су Fourier-ови коефицијенти у бази $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ управо $(x_n)_{n=1}^\infty$.***

$\triangle$ Тражена функција је одређена изометричким изоморфизмом U из доказа претходне теореме изразом $\boldsymbol{x} \overset{\text{def}}{=} U^{-1}(x_n)_{n=1}^\infty$. $\square$