ГЛАВА 11

Линеарни функционали и оператори на Hilbert-овом простору

1. Репрезентација линеарних функционала

Због специфичне структуре Hilbert-овог простора линеарни функционали на њему имају посебно једноставну структуру.

Теорема 11.1.[Fréchet[1]-Riesz-a] ***Сваки ограничен линеарни функционал $g^\star$ на H може се једнозначно представити као скаларно множење $\langle \cdot, g\rangle$ одређеним елементом g простора H, за кога је $\|g^\star\| = \|g\|$.***

$\triangle$ Дакле показаћемо да је

$$g^\star(f) = \langle f, g\rangle \qquad \text{за свако } f \in H, \tag{11.1}$$

за неки функционалом $g^\star$ једнозначно одређен вектор $g \in H$. Приметимо прво да је скаларно множење $\langle \cdot, g\rangle$ елементом g линеарни функционал, и то норме управо једнаке $\|g\|$. Збиља

$$|\langle \cdot, g\rangle (f)| = |\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \, \|g\|$$

за свако $f \in H$, па је тако $\|\langle \cdot, g\rangle\| \leq \|g\|$. Али како је

$$\|g\|^2 = \langle g, g\rangle = \langle \cdot, g\rangle (g) \leq \|\langle \cdot, g\rangle\| \, \|g\|,$$

то је онда и $\|g\| \leq \|\langle \cdot, g\rangle\|$, те је дакле $\|\langle \cdot, g\rangle\| = \|g\|$.

Обрнуто, за случај да је језгро $\ker(g^\star) = H$, имамо $g^\star(f) = 0 = \langle f, 0\rangle$ за све $f \in H$, па (11.1) важи при $g = 0$. Из ограничености $g^\star$ произилази да је $\ker(g^\star)$ затворен потпростор, тако да према ставу 10.14 мора бити $\ker(g^\star)^\perp \neq \mathbf{0}$ у случају да је $\ker(g^\star) \neq H$. За било које уочено $0 \neq h \in \ker(g^\star)^\perp$ знамо да је $g^\star(h) \neq 0$ јер је $\ker(g^\star)^\perp \cap \ker(g^\star) = \mathbf{0}$. А како је

$$g^\star\big(f - \tfrac{g^\star(f)}{g^\star(h)} h\big) = g^\star(f) - \tfrac{g^\star(f)}{g^\star(h)} g^\star(h) = 0,$$

то је $f - \frac{g^\star(f)}{g^\star(h)} h \in \ker(g^\star)$, па због $h \in \ker(g^\star)^\perp$ важи

$$\langle f, h\rangle - \tfrac{g^\star(f)}{g^\star(h)} \langle h, h\rangle = \big\langle f - \tfrac{g^\star(f)}{g^\star(h)} h, h\big\rangle = 0 \qquad \text{за свако } f \in H.$$

[1] Фреше– René Maurice Fréchet (1878–1973)

Одавде пак одмах прерачунавамо да је $g^\star(f) = \frac{g^\star(h)}{\langle h,h\rangle}\langle f,h\rangle = \left\langle f, \overline{\frac{g^\star(h)}{\|h\|^2}}h\right\rangle$, те смо збиља добили репрезентацију (11.1) при

$$g = \overline{\frac{g^\star(h)}{\|h\|^2}}h. \tag{11.2}$$

Уколико је $g^\star(f) = \langle f,g\rangle = \langle f,g'\rangle$ за све $f \in H$ при још неком $g' \in H$, онда специјално за $f = g - g'$ мора да је $\|g - g'\|^2 = \langle g-g',g\rangle - \langle g-g',g'\rangle = 0$, дакле $g = g'$. Тиме је, уз претходно израчунату норму, на послетку доказана и јединственост репрезентације (11.1) за ограничен линеарни функционал $g^\star$. □

Примедба 11.2. На основу (11.2) се види и да је $H \ominus \ker(g^\star)$ највише једнодимензионалан.

Пошто смо описали елементе дуалног простора $H^\star$ са $\langle\cdot,g\rangle$ за неко $g \in H$, можемо да видимо и како конкретно изгледају операције на $H^\star$. Дакле, за свако $f,g,h \in H$ и $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ је

$$(\alpha\langle\cdot,g\rangle + \beta\langle\cdot,h\rangle)(f) = \alpha\langle f,g\rangle + \beta\langle f,h\rangle = \left\langle f,\overline{\alpha}g + \overline{\beta}h\right\rangle = \left\langle\cdot,\overline{\alpha}g + \overline{\beta}h\right\rangle(f),$$

па другим речима

$$\alpha\langle\cdot,g\rangle + \beta\langle\cdot,h\rangle = \left\langle\cdot,\overline{\alpha}g + \overline{\beta}h\right\rangle$$

дефинише линеарне операције код функционала. Да је норма функционала заиста норма у овом случају нам говоре једнакости

$$\|\alpha\langle\cdot,g\rangle\| = \|\langle\cdot,\overline{\alpha}g\rangle\| = \|\overline{\alpha}g\| = |\alpha|\,\|g\| = |\alpha|\,\|\langle\cdot,g\rangle\| \quad \text{и}$$

$$\|\langle\cdot,g\rangle + \langle\cdot,h\rangle\| = \|\langle\cdot,g+h\rangle\| = \|g+h\| \leq \|g\| + \|h\| = \|\langle\cdot,g\rangle\| + \|\langle\cdot,h\rangle\|.$$

Описивање линеарних функционала на H управо векторима из H сугерише да важи

Теорема 11.3. ***За сваки сепарабилан Hilbert-ов простор H његов дуал $H^\star$ је изометрички изоморфан са H.***

△ Формула $J\langle\cdot,g\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^\infty \langle e_n,g\rangle e_n$ за било коју О.Н.Б. $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ простора H (опрез: $g = \sum_{n=1}^\infty \langle g,e_n\rangle e_n$) дефинише изометрички изоморфизам простора $H^\star$ и H. Заиста, линеарност следи из једнакости

$$J(\alpha\langle\cdot,g\rangle + \beta\langle\cdot,h\rangle) = J\left\langle\cdot,\overline{\alpha}g + \overline{\beta}h\right\rangle = \sum_{n=1}^\infty \left\langle e_n,\overline{\alpha}g + \overline{\beta}h\right\rangle e_n =$$

$$\alpha\sum_{n=1}^\infty \langle e_n,g\rangle e_n + \beta\sum_{n=1}^\infty \langle e_n,h\rangle e_n = \alpha J\langle\cdot,g\rangle + \beta J\langle\cdot,h\rangle,$$

за свако $g,h \in H$ и све $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, док изометричност следи из

$$\|J\langle\cdot,g\rangle\| = \left\|\sum_{n=1}^\infty \langle e_n,g\rangle e_n\right\| = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |\langle e_n,g\rangle|^2} = \|g\| = \|\langle\cdot,g\rangle\|$$

на основу Parseval-ове једнакости. Сурјективност изоморфизма J непосредно се утврђује из формуле $J^{-1}g = \langle\cdot,\sum_{n=1}^\infty \langle e_n,g\rangle e_n\rangle$ за свако $g \in H$. □

Штавише, због изометричности J правило паралелограма важиће и у $H^\star$, па је на основу теореме 10.13 и $H^\star$ такође Hilbert-ов простор у коме је скаларни производ (сагласно поларизационом идентитету) дат са

$$\langle\langle\cdot, g\rangle, \langle\cdot, h\rangle\rangle_{H^\star} = \langle h, g\rangle \qquad \text{за све } g, h \in H.$$

Заиста,

$$\begin{aligned}\langle\langle\cdot, g\rangle, \langle\cdot, h\rangle\rangle_{H^\star} &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|\langle\cdot, g\rangle + i^k\langle\cdot, h\rangle\right\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|\langle\cdot, g + i^{-k}h\rangle\right\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|g + i^{-k}h\right\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|h + i^{k}g\right\|^2 = \langle h, g\rangle.\end{aligned}$$

Такође се лако проверава да је $\{\langle\cdot, e_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (тзв. дуална) О.Н.Б. у $H^\star$ ако и само ако је $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ О.Н.Б. за H.

Познавање облика ограничених линеарних функционала на H директно нам омогућава да конкретизујемо слабу конвергенцију вектора у Hilbert-овим просторима.

Став 11.4. ***Низ*** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***у*** H ***слабо конвергира вектору*** f ***истог простора ако и само ако је*** $\lim_{n\to\infty}\langle f_n, g\rangle = \langle f, g\rangle$ ***за свако*** $g \in H$.

Као и раније, у горе наведеном случају писаћемо да је $f = \mathrm{w}-\lim_{n\to\infty} f_n$.

Следеће тврђење је појачење раније навођеног става 10.10 о непрекидности скаларног производа (у собом индукованој норми).

Лема 11.5. ***Ако је*** $f = \mathrm{w}-\lim_{n\to\infty} f_n$ ***и*** $g = \mathrm{s}-\lim_{n\to\infty} g_n$, ***онда је*** $\lim_{n\to\infty}\langle f_n, g_n\rangle = \langle f, g\rangle$.

$\triangle$ Следи из процене

$$|\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle| \leq \|f_n\|\,\|g_n - g\| + |\langle f_n, g\rangle - \langle f, g\rangle|,$$

када се узме у обзир да је $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\| < +\infty$ на основу принципа униформне ограничености. $\square$

Следећа лема нијансира разлику између слабе и јаке конвергенције у Hilbert-овим просторима.

Лема 11.6. ***За*** $f = \mathrm{s}-\lim_{n\to\infty} f_n$ ***је неопходно и довољно да буде*** $f = \mathrm{w}-\lim_{n\to\infty} f_n$ ***и*** $\|f\| = \lim_{n\to\infty}\|f_n\|$.

$\triangle$ Неопходност је очигледна, док довољност наведених услова за јаку конвергенцију следи из идентитета

$$\|f_n - f\|^2 = \|f_n\|^2 - 2\mathfrak{Re}\,\langle f_n, f\rangle + \|f\|^2 = \|f_n\|^2 - \|f\|^2 - 2\mathfrak{Re}\langle f_n - f, f\rangle. \quad \square$$

У бесконачно димензионалним Hilbert-овим просторима ограничени низови (нпр. низ вектора неке О.Н.Б.) не морају имати конвергентне поднизове. Али ако од поднизова захтевамо само слабу конвергенцију, такав проблем је потврдно решив.

ТЕОРЕМА 11.7. ***Сваки ограничен скуп у Hilbert-овом простору H је слабо релативно компактан.***

$\triangle$ Дакле, за сваки ограничен низ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ издвојићемо слабо конвергентан подниз. Нека је дакле $C \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n\geq 1} \|f_n\| < +\infty$ и у складу са сепарабилношћу H нека је $G \stackrel{\text{def}}{=} \{g_n : n = 1, 2, \ldots\}$ његов густ подскуп. Ограничен низ $\{\langle g_1, f_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ има конвергентан подниз $\{\langle g_1, f_n^{(1)}\rangle\}_{n=1}^{\infty}$, а слично ограничен низ $\{\langle g_2, f_n^{(1)}\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ има конвергентан подниз $\{\langle g_2, f_n^{(2)}\rangle\}_{n=1}^{\infty}$. Настављајући овај поступак, за свако $m \in \mathbb{N}$ долазимо до подниза $\{f_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$ оригиналног низа $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ за кога низови $\{\langle g_k, f_n^{(1)}\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ конвергирају за свако $k = 1, 2, \ldots, m$. За свако $m \in \mathbb{N}$ Cantor-ов дијагонални подниз $\{f_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ низа $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, почевши од свог m тог члана, је и сам подниз од $\{f_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$, па постоји

$$\lim_{n\to\infty} \langle \cdot, f_n^{(n)}\rangle(g_m) = \lim_{n\to\infty} \langle g_m, f_n^{(n)}\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle g_m, f_n^{(m)}\rangle \qquad \text{за свако } m \in \mathbb{N}.$$

Тако је $\{\langle \cdot, f_n^{(n)}\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ ограничен низ линеарних функционала на H који слабо конвергира на његовом густом подскупу G. Према теореми 7.9 Banach-Steinhous-а постојаће онда и $\lim_{n\to\infty}\langle \cdot, f_n^{(n)}\rangle(g)$ за свако $g \in H$ и дефинисаће линеаран функционал на H норме не веће од C, који према Freshet-Riesz-овој теореми 11.1 мора бити облика $\langle \cdot, f\rangle$ за неко $f \in H$. То нам говори да нађени подниз $\{f_n^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ низа $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо конвергира ка f, што је и требало показати. $\square$

Вежбања 11.1.

1. За изабрани $z \in \mathbb{C}$ формулом $\mathfrak{z}^\star(f) = f(z)$ на функцијама $f \in \boldsymbol{F}^2$ одређен је један ограничени линеарни функционал на $\boldsymbol{F}^2$ за кога је $\|\mathfrak{z}^\star\| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{|z|^2}{2}}$.
2. Доказати да за свако $z \in \mathbb{D}$ формула $\mathfrak{z}^\star(f) = f(z)$ за $f \in \boldsymbol{A}^2(\mathbb{D})$, задаје један ограничени линеарни функционал на $\boldsymbol{A}^2$ код кога је $\|\mathfrak{z}^\star\| = \frac{1}{\sqrt{\pi}(1-|z|^2)}$.

2. Сесквилинеарне форме и линеарни оператори

Предходна Frechet-Riesz-ова теорема омогућава нам да стекнемо и бољи увид у структуру ограничених сесквилинеарних форми.

ТЕОРЕМА 11.8. ***Свака ограничена сесквилинеарна форма $\langle \cdot, \cdot\rangle_\Phi$ на Hilbert-овом простору H једнозначно одређује ограничене линеарне операторе A и B на H за које важи***

$$\langle f, g\rangle_\Phi = \langle Af, g\rangle = \langle f, Bg\rangle \qquad \textit{за све } f, g \in H. \tag{11.3}$$

Притом је $\|A\| = \|B\| = \|\Phi\|$.

$\triangle$ На основу елементарних особина скаларног производа уверавамо се да је за сваки $B \in \mathfrak{B}(H)$ изразом $\Phi(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, Bg\rangle$ за све $f, g \in H$ дата једна сесквилинеарна форма $\langle \cdot, \cdot\rangle_\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \Phi$, која је, штавише, и ограничена. Заиста,

$$|\langle f, g\rangle_\Phi| = |\langle f, Bg\rangle| \leq \|f\| \, \|Bg\| \leq \|B\| \, \|f\| \, \|g\|,$$

одакле закључујемо

$$\|\Phi\| \leq \|B\|\,. \tag{11.4}$$

При фиксираном $g \in H$ ће $g^\star(f) = \langle f, g\rangle_\Phi$ при $f \in H$ дефинисати линеран функционал чија норма због $|\langle f, g\rangle_\Phi| \leq \|\Phi\|\,\|g\|\,\|f\|$ за све $f \in H$ свакако не превазилази $\|\Phi\|\,\|g\|$. Због тога према Freshet-Riesz-овој теореми мора постојати $B(g) \in H$ за који је $\langle f, g\rangle_\Phi = \langle f, B(g)\rangle$ за све $f \in H$, а притом још знамо да је $\|B(g)\| = \|g^\star\| \leq \|\Phi\|\,\|g\|$. Размотримо детаљније својства придруживања $g \to B(g)$ вектора простора H. Ако су $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, а $B(h)$ и $B(\alpha g+\beta h)$ придружени редом векторима h и $\alpha g + \beta h$ из H, тада је за свако $f \in H$

$$\begin{aligned}\langle f, B(\alpha g + \beta h)\rangle &= \langle f, \alpha g + \beta h)\rangle_\Phi \\ &= \bar\alpha\,\langle f, g\rangle_\Phi + \bar\beta\,\langle f, h\rangle_\Phi = \bar\alpha\,\langle f, B(g)\rangle + \bar\beta\,\langle f, B(h)\rangle = \langle f, \alpha B(g) + \beta B(h)\rangle\,,\end{aligned}$$

што због јединствености овакве репрезентације гарантује да важи $B(\alpha g + \beta h) = \alpha B(g) + \beta B(h)$. Дакле, разматрано придруживање $g \mapsto B(g)$ је **линеарно,** то јест, B је линеаран оператор на H. Да је B и ограничен види се на основу већ установљеног $\|B(g)\| \leq \|\Phi\|\,\|g\|$, што значи да је $\|B\| \leq \|\Phi\|$. Заједно са (11.4) то значи да је $\|B\| = \|\Phi\|$ за, формом Φ и идентитетом $\langle f, g\rangle_\Phi = \langle f, Bg\rangle$ за све $f, g \in H$, једнозначно одређеним оператором $B \in \mathfrak{B}(H)$.

За адјунговану форму Φ^* дату са $\langle f, g\rangle_{\Phi^*} \overset{\text{def}}{=} \overline{\langle g, f\rangle_\Phi}$ за све $f, g \in H$ је $\|\Phi^*\| = \|\Phi\|$, па је и $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Phi^*}$ ограничена сесквилинеарна форма, за коју онда према претходно установљеном постоји једнозначно одређен $A \in \mathfrak{B}(H)$ норме $\|A\| = \|\Phi^*\| = \|\Phi\|$, такав да је

$$\langle f, g\rangle_{\Phi^*} = \langle f, Ag\rangle \qquad \text{за све } f, g \in H.$$

Тако је

$$\langle f, g\rangle_\Phi = \overline{\langle g, f\rangle_{\Phi^*}} = \overline{\langle g, Af\rangle} = \langle Af, g\rangle \qquad \text{за све } f, g \in H,$$

па је доказ потпун. □

ПРИМЕР 11.1. За свако $r \in \mathbb{N}$ и дате низове вектора $\{e_n\}_{n=1}^r$ и $\{f_n\}_{n=1}^r$ у H коначно димензионални оператор $K \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^r \langle\cdot, e_n\rangle\, f_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^r f_n \otimes e_n{}^\star$, дат са $Kg \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^r \langle g, e_n\rangle\, f_n$ за свако $g \in H$, је ограничен и има сесквилинеарну форму $\langle Kg, h\rangle = \sum_{n=1}^r \langle g, e_n\rangle\,\langle f_n, h\rangle$. Важи $\|K\| \leq \sum_{n=1}^r \|e_n\|\,\|f_n\|$, а при $r = 1$ важиће конкретно $\|\langle\cdot, e\rangle\, f\| = \|e\|\,\|f\|$ за све $e, f \in H$.

Покажимо још да су претходним изразом веродостојно описани оператори коначног ранга у H.

СТАВ 11.9. *$K \in \mathfrak{B}(H)$ је ранга r*

1° ***ако и само ако постоје линеарно независни системи вектора $\{e_n\}_{n=1}^r$ у $H \ominus N(K)$ и $\{f_n\}_{n=1}^r$ у $R(K)$ за које је***

$$K = \sum_{n=1}^r \langle\cdot, e_n\rangle\, f_n \tag{11.5}$$

2° ***ако и само ако је K^* ранга r.***

△ 1° Ако је K облика (11.5), тада је $Kg = \sum_{n=1}^{r} \langle g, e_n \rangle f_n \in \underset{1\le n\le r}{\mathfrak{Lin}} f_n$ за свако $g \in H$, па је $R(K) \subset \underset{1\le n\le r}{\mathfrak{Lin}} f_n$. За сваки нетривијалан $g \in \underset{1\le n\le r}{\mathfrak{Lin}} e_n \ominus \underset{m\ne n}{\mathfrak{Lin}}\, e_m$ је $\langle g, e_n \rangle f_n = Kg \in R(K)$, па је $\underset{1\le n\le r}{\mathfrak{Lin}} f_n \subset R(K)$, односно $R(K) = \underset{1\le n\le r}{\mathfrak{Lin}} f_n$, а $\dim R(K) = r$.

Обрнуто, сваки оператор коначног ранга r је облика (11.5) за линеарно независне векторе $\{e_n\}_{n=1}^{r}$ у $H \ominus N(K)$ и ортонормирану базу $\{f_n\}_{n=1}^{r}$ простора $R(K)$. Заиста, за сваку такву базу и сваки $g \in H$ је $Kg \in R(K)$, па важи Fourier-ов развој

$$Kg = \sum_{n=1}^{r} \langle Kg, f_n \rangle f_n = \sum_{n=1}^{r} \langle g, K^* f_n \rangle f_n = \Big(\sum_{n=1}^{r} \langle \cdot, K^* f_n \rangle f_n\Big)(g).$$

Тражено представљање (11.5) добија се при избору $K^* f_n$ за e_n за $n = 1, \dots, r$, будући да су сви елементи од $H \ominus N(K)$ због $\langle K^* f_n, h \rangle = \langle f_n, Kh \rangle = 0$ за сваки $h \in N(K)$, а линеарно су независни. Ово последње зато што би у случају њихове линеарне зависности, рецимо облика $K^* f_r = \sum_{n=1}^{r-1} \lambda_n K^* f_n$ било

$$\begin{aligned} Kg = \sum_{n=1}^{r} \langle Kg, f_n \rangle f_n &= \sum_{n=1}^{r-1} \langle g, K^* f_n \rangle f_n + \Big\langle g, \sum_{n=1}^{r-1} \lambda_n K^* f_n \Big\rangle f_r \\ &= \sum_{n=1}^{r-1} \langle g, K^* f_n \rangle (f_n + \overline{\lambda_n} f_r) = \Big(\sum_{n=1}^{r-1} \langle \cdot, K^* f_n \rangle (f_n + \overline{\lambda_n} f_r)\Big) g, \end{aligned}$$

што би довело до контрадикције да је K ранга не већег од $r - 1$.

2° следи директно из 1°, а лако се доказује и непосредно. □

Вежбања 11.2.

1. Показати да су $\mathcal{F}(H)$ и $\mathcal{B}(H)$ изометрички изоморфни простори.
2. Уз помоћ принципа униформне ограничености показати да за сваки ограничен комплексан низ $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и било које О.Н.Б. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторни ред $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \cdot, e_n \rangle f_n$ **јако** конвергира оператору из $\mathcal{B}(H)$. Одредити му норму, а затим испитати под којим условима овај ред конвергира униформно (тј. у норми простора $\mathcal{B}(H)$).
3. Показати да је $\mathcal{B}(H)$ несепарабилан увек кад је H бесконачно димензионалан.

   Упутство: Ако је $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ О.Н.Б. у H, за сваки низ $\alpha \overset{\text{def}}{=} \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ у $\{0,1\}$ посматрати $A_\alpha \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle \cdot, e_n \rangle e_n$ и доказати да је $\|A_\alpha - A_\beta\| = 1$ за свако $\alpha \ne \beta$.
4. Ако $\langle A_n f, g \rangle \to \langle Af, g \rangle$ униформно по $\|g\| = 1$ кад $n \to \infty$, тада $\|A_n f - Af\| \to 0$ кад $n \to \infty$ за свако такво $f \in H$, а ако $\|A_n f - Af\| \to 0$ кад $n \to \infty$ униформно по $f \in \overline{\mathbb{B}}(0,1)$, онда $\|A_n - A\| \to 0$.
5. Норма простора $\mathcal{B}(H)$ је слабо полунепрекидна одоздо, тј.
$$\|A\| \le \liminf_{n\to\infty} \|A_n\| \qquad \text{кад год је } A = \text{w}-\lim_{n\to\infty} A_n \text{ за неке } A_n \in \mathcal{B}(H).$$
6. Множење оператора је непрекидна операција у униформној топологији (другим речима чува униформну конвергенцију), а прекидна у јакој и слабој топологији.
7. За какве $A \in \mathcal{B}(H)$ је $\text{w}-\lim_{n\to\infty} A_n^2 = A^2$ увек кад је $\text{w}-\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

3. Адјунговани оператор

Видели смо да у релацији (11.3) сваки од објеката A, B и Φ једнозначно одређује преостала два. А како смо то видели из поларизационог идентитета, у комплексним Hilbert-овим просторима сесквилинеарна и квадратна форма једнозначно одређују једна другу, па је специјално сваки $A \in \mathfrak{B}(H)$ потпуно одређен било својом сесквилинеарном формом $\Phi_A \overset{\text{def}}{=} \langle\cdot,\cdot\rangle_A \overset{\text{def}}{=} \langle A\cdot,\cdot\rangle$ датом са

$$\Phi_A(f,g) \overset{\text{def}}{=} \langle f,g\rangle_A \overset{\text{def}}{=} \langle Af,g\rangle \qquad \text{за све } f,g \in H,$$

било својом квадратном формом $\varphi_A \overset{\text{def}}{=} [\cdot]_A$, одређеном са

$$\varphi_A(f) \overset{\text{def}}{=} [f]_A \overset{\text{def}}{=} \langle Af,f\rangle \qquad \text{за све } f \in H.$$

Придружени оператор B у релацији (11.3) означаваћемо са A^* и називаћемо га **адјунгованим** оператором оператора A. Дакле, адјунговање као операција на $\mathfrak{B}(H)$ потпуно је описана идентитетом

$$\langle Af,g\rangle = \langle f,A^*g\rangle \qquad \text{за све } f,g \in H. \tag{11.6}$$

Основне особине адјунговања наводи следећи

Став 11.10. ***За све*** $A,B \in \mathfrak{B}(H)$ ***и свако*** $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ ***је***

1° $(\alpha A+\beta B)^* = \bar\alpha A^* + \bar\beta B^*$,
2° $A^{**} = A$,
3° $(AB)^* = B^*A^*$,
4° $I^* = I$,
5° $\|A^*\| = \|A\|$,
6° $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$,
7° $A^*A = 0$ ***ако и само ако је и*** $A = 0$,
8° A ***је инвертибилан ако и само ако је*** A^* ***инвертибилан, а у том случају је*** $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$,
9° $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)} \overset{\text{def}}{=} \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$.

△ $1°, 2°, 3°$ и $4°$ се доказују непосредно, док $5°$ следи из теореме 11.8. Одатле имамо и да је $\|A^*A\| \le \|A^*\|\,\|A\| = \|A\|^2$. С друге стране важи

$$\|Af\|^2 = \langle Af,Af\rangle = \langle A^*Af,f\rangle \le \|A^*Af\|\,\|f\| \le \|A^*A\|\,\|f\|^2 \quad \text{за свако } f \in H,$$

одакле закључујемо да је $\|A\| \le \sqrt{\|A^*A\|}$. Тиме је утврђено да је $\|A^*A\| = \|A\|^2$, одакле опет узимајући у обзир и $5°$ добијамо да је $\|AA^*\| = \|A^*\|^2 = \|A\|^2$.

Из $6°$ одмах произилази и $7°$, док на основу $3°$ и $4°$ проверавамо да је

$$A^*\bigl(A^{-1}\bigr)^* = \bigl(A^{-1}A\bigr)^* = I^*(=I) = \bigl(AA^{-1}\bigr)^* = \bigl(A^{-1}\bigr)^*A^*,$$

што управо показује да важи и $8°$. Применом $8°$ на $A-\lambda I$ наместо A за $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\sigma(A)$ следи да $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}\setminus\sigma(A^*)$, дакле $\sigma(A^*) \subset \overline{\sigma(A)}$. Заменом улога A и A^* из већ доказаног следи $\overline{\sigma(A)} = \overline{\sigma(A^{**})} \subset \overline{\overline{\sigma(A^*)}} = \sigma(A^*)$, што заједно са претходно доказаним даје $9°$. □

Пример 11.2. За оператор $K \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{r} \langle \cdot, e_n \rangle f_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{r} f_n \otimes e_n^\star$ коначног ранга њему адјуговани оператор дат је са $K^* = \sum_{k=1}^{r} \langle \cdot, f_n \rangle e_n = \sum_{k=1}^{r} e_n \otimes f_n^\star$, јер за свако $g, h \in H$ важи

$$\langle Kg, h \rangle = \Big\langle \sum_{n=1}^{r} \langle g, e_n \rangle f_n, h \Big\rangle = \sum_{n=1}^{r} \langle g, e_n \rangle \langle f_n, h \rangle$$
$$= \Big\langle g, \sum_{n=1}^{r} \overline{\langle f_n, h \rangle} e_n \Big\rangle = \Big\langle g, \Big(\sum_{n=1}^{r} \langle \cdot, f_n \rangle e_n \Big) h \Big\rangle.$$

3.1. Адјунговање и декомпозиција простора. Између језгра и слике међусобно адјунгованих оператора постоји следећа веза:

Теорема 11.11. *За сваки $A \in \mathcal{B}(H)$ важи*

1° $N(A^*) = R(A)^\perp$,
2° $H = N(A^*) \oplus \overline{R(A)} = N(A) \oplus \overline{R(A^*)}$,
3° $N(A) = N(A^*A)$,
4° $\overline{R(A)} = \overline{R(AA^*)}$.

△ $N(A^*) \subset R(A)^\perp$ јер за свако $f \in N(A^*)$ је $\langle f, Ag \rangle = \langle A^* f, g \rangle = \langle 0, g \rangle = 0$ за свако $g \in H$, што показује да је $f \perp R(A)$. Обрнуто, очигледно $AA^*f \in R(A)$, па важи

$$\|A^*f\|^2 = \langle A^*f, A^*f \rangle = \langle f, AA^*f \rangle = 0 \qquad \text{за свако } f \in R(A)^\perp;$$

те за њих важи и $f \in N(A^*)$, чиме је установљено 1°.

Први део 2° следи из 1° јер је $N(A)$ затворен, док је други део тврђења у суштини исто што и први, само адекватно примењен на A^*.

За доказ 3° уочимо произвољно $f \in N(A)$ и уочимо одмах да тада важи $A^*Af = A^*0 = 0$, тј. $f \in N(A^*A)$. Обрнуто, кад год је $f \in N(A^*A)$, онда је

$$\|Af\|^2 = \langle Af, Af \rangle = \langle f, A^*Af \rangle = \langle f, 0 \rangle = 0,$$

те је $f \in N(A)$, што доказује 3°.

На основу 3° је

$$\overline{R(A)} = H \ominus N(A^*) = H \ominus N(AA^*) = \overline{R(AA^*)^*} = \overline{R(AA^*)},$$

што коначно доказује и 4°. □

Осим комутативности установљене тачком 3° става 11.10 размотримо даље везе инвертибилности и адјунговања код ограничених оператора.

Подсетимо се да према дефиницији 2.13 за оператор $A \in \mathcal{B}(H)$ кажемо да је одоздо ограничен ако и само ако постоји $c > 0$ такво да је $\|Af\| \geq c\|f\|$ за свако $f \in H$. У Hilbert-овом простору имамо и појачану верзију леме 2.8.

Став 11.12. *$A \in \mathcal{B}(H)$ је инвертибилан ако и само ако је одоздо ограничен и има густу слику.*

△ Ако је A инвертибилан, онда је $R(A) = H$, што свакако представља скуп који је густ у H. Осим тога

$$\|Af\| \geq \frac{\|A^{-1}Af\|}{\|A^{-1}\|} = \frac{1}{\|A^{-1}\|}\|f\| \qquad \text{за све } f \in H,$$

па је A и одоздо ограничен (за c из дефиниције 2.13 довољно је узети $\frac{1}{\|A^{-1}\|}$).

Обрнуто, размотримо одоздо ограничен оператор A са густом у H сликом $R(A)$. Тако за сваки $y \in H$ имамо да је $y = \lim_{n\to\infty} Af_n$, а због

$$\|f_m - f_n\| \leq \tfrac{1}{c}\|A(f_m - f_n)\| = \tfrac{1}{c}\|Af_m - Af_n\| \qquad \text{за све } m, n \in \mathbb{N}$$

и чињенице са је $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-ев закључујемо да је и сам низ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-ев, те дакле конвергира неком $f \in H$. Због непрекидности A за ову границу пак важи $Af = A\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} Af_n = y$, што значи да је $y \in R(A)$, односно да је $R(A)$ затворен. А како је $R(A)$ и густ у H, мора бити $R(A) = H$, па с обзиром на јасну инјективност одоздо ограничених оператора A онда мора бити инвертибилан. Његов инверз је притом и сам један ограничен оператор, будући да је $\|A^{-1}f\| \leq \frac{1}{c}\|AA^{-1}f\| = \frac{1}{c}\|f\|$ за свако $f \in H$. □

Сада већ можемо формулисати и једноставан критеријум инвертибилности оператора.

Последица 11.13. ***Ако су за неки $A \in \mathcal{B}(H)$ истовремено и A и A^* одоздо ограничени, онда су и A и A^* инвертибилни.***

△ Како је горе наведеном случају $N(A^*) = \{0\}$, а $R(A)$ затворен према претходној теореми, то је онда $H = N(A^*) \oplus R(A) = R(A)$ у складу са теоремом 11.11. Сада и комплетан закључак за A, а аналогно и за A^*, следи из става 11.12. □

3.2. Адјунговање и конвергенција оператора. Сама могућност адјунговања сваког ограниченог оператора често је од помоћи при доказивању његових особина, као у наредном ставу.

Став 11.14. ***Сваки $A \in \mathcal{B}(H)$ је слабо (секвенцијално) непрекидан.***

△ Другим речима, сваки $A \in \mathcal{B}(H)$ чува слабу конвергентност низова у H. Тако ако је $f = \mathrm{w-}\lim_{n\to\infty} f_n$, онда је

$$\lim_{n\to\infty} \langle Af_n, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, A^*g\rangle = \langle f, A^*g\rangle = \langle Af, g\rangle, \qquad \text{за свако } g \in H,$$

одакле коначно закључујемо да је $\mathrm{w-}\lim_{n\to\infty} Af_n = Af$. □

С обзиром на конкретан облик линеарних функционала на H, можемо да закључимо да конкретно низ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ у $\mathcal{B}(H)$ **слабо** конвергира ка $A \in \mathcal{B}(H)$ ако и само ако је $\lim_{n\to\infty} \langle A_n f, g\rangle = \langle Af, g\rangle$ за свако $f, g \in H$.

Размотримо неке аспекте међуодноса слабе конвергенције и адјунговања.

Теорема 11.15. ***Адјунговање је слабо непрекидна операција на $\mathcal{B}(H)$.***

$\triangle$ Другим речима, показујемо да се адјунговањем слабо конвергентни низ оператора преводи у исти такав. Нека је дакле $A = \mathrm{w}-\lim_{n\to\infty} A_n$, тј. $\lim_{n\to\infty} \langle A_n g, f\rangle = \langle Ag, f\rangle$ за свако $f, g \in H$. Но тада је и

$$\lim_{n\to\infty} \langle A_n^* f, g\rangle - \langle A^* f, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle (A_n^* - A^*) f, g\rangle =$$
$$\lim_{n\to\infty} \langle f, (A_n - A) g\rangle = \lim_{n\to\infty} \overline{\langle (A_n - A) g, f\rangle} = 0 \qquad \text{за све } f, g \in H,$$

те је $\mathrm{w}-\lim_{n\to\infty} A_n^* = A^*$. $\square$

Следеће две теореме говоре о слагању различитих врста конвергенције код оператора.

Теорема 11.16. ***Уколико*** $A_n \xrightarrow{\mathrm{s}} A$ ***и*** $B_n \xrightarrow{\mathrm{s}} B$ ***кад*** $n \to \infty$***, онда и*** $A_n B_n \xrightarrow{\mathrm{s}} AB$ ***кад*** $n \to \infty$.

$\triangle$ Како је $C \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\limits_{n\ge 1} \|A_n\|$ коначан по принципу униформне ограничености (теорема 7.6), онда због

$$\|A_n B_n f - ABf\| = \|A_n (B_n - B) f + (A_n - A) Bf\|$$
$$\le C \|B_n f - Bf\| + \|(A_n - A) Bf\| \to 0$$

кад $n \to \infty$ за свако $f \in H$ следи закључак теореме. $\square$

Теорема 11.17. ***Ако*** $A_n \xrightarrow{\mathrm{w}} A$ ***слабо, а*** $B_n \xrightarrow{\mathrm{s}} B$ ***јако кад*** $n \to \infty$***, онда и*** $A_n B_n \xrightarrow{\mathrm{w}} AB$ ***кад*** $n \to \infty$.

$\triangle$ По теореми 11.15 имамо да је и $\mathrm{w}-\lim_{n\to\infty} A_n^* = A^*$, што значи да је $\mathrm{w}-\lim_{n\to\infty} A_n^* g = A^* g$ за сваки $g \in H$. Како је $\mathrm{s}-\lim_{n\to\infty} B_n f = Bf$ за сваки $f \in H$, то је према леми 11.5

$$\lim_{n\to\infty} \langle A_n B_n f, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle B_n f, A_n^* g\rangle = \langle Bf, A^* g\rangle = \langle ABf, g\rangle\,,$$

чиме је теорема доказана. $\square$

Приметимо још да се у горњој теореми јака конвергенција низа $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ не може заменити слабом, чак ни када се претпостави јака конвергенција низа $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Суштински разлог јесте изостанак јаке непрекидности адјунговања, како то показује следећи пример. Наиме, за било који уочени ортонирмиран систем $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и операторе $A_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \cdot, e_n\rangle\, e_1$ и $B_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} A_n^* = \langle \cdot, e_1\rangle\, e_n$ важи $A_n \xrightarrow{\mathrm{s}} 0$ и $B_n \xrightarrow{\mathrm{w}} 0$, док је $A_n B_n = \langle \cdot, e_1\rangle\, e_1$ за свако $n \ge 1$, уз очигледно изостајање слабе конвергенције последњег низа ка нули.

Вежбања 11.3.

1. Показати да је за сваки $A \in \mathfrak{B}(H)$ његов конјуговани оператор $A^\star \in \mathfrak{B}(H^\star)$ дат формулом $A^\star \langle \cdot, g\rangle = \langle \cdot, A^* g\rangle$ за свако $g \in H$, где је A^* адјунговани оператор за A сагласно (11.6).
2. Доказати да је сужење операције адјунговања на фамилију нормалних оператора $A \in \mathfrak{B}(H)$ (тј. оних за које је $A^* A = AA^*$) јако непрекидна операција.

3. Доказати да је за сваки $A \in \mathcal{B}(H)$ његов график $G_A \stackrel{\text{def}}{=} \{(f, Af) : f \in H\}$ један затворен потпростор од $H \oplus H$, са $\{(-A^*g, g) : g \in H\}$ као својим ортокомплементом.
4. Доказати да је оператор $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$ на $H \oplus H$, дефинисан са
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} Af + Bg \\ Cf + Dg \end{bmatrix} \qquad \text{за свако } f, g \in H,$$
има адјунговани оператор дат са $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]^* = \left[\begin{smallmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{smallmatrix}\right]$.
5. Доказати да је скуп свих инвертибилних оператора повезан у $\mathcal{B}(H)$.

4. Матрична репрезентација оператора

Ако је $d \stackrel{\text{def}}{=} \dim H$ димензија простора H, тада при фиксираној бази $\{e_i\}_{i=1}^d$ сваки $A \in \mathcal{B}(H)$ има своју једнозначну матричну репрезентацију. Ако за дати $A \in \mathcal{B}(H)$ означимо матрицу $\mathtt{Mat}A \stackrel{\text{def}}{=} [\langle Ae_j, e_i\rangle]_{i,j=1}^d$, онда је за свако $f \in H$ и свако $i \in \mathbb{N}$
$$\langle Af, e_i\rangle = \langle f, A^*e_i\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^d \langle f, e_j\rangle\, e_j, A^*e_i \Big\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^d \langle f, e_j\rangle \langle e_j, A^*e_i\rangle = \sum_{i=1}^d \langle Ae_j, e_i\rangle \langle f, e_j\rangle$$
на основу јаке конвергенције Fourier-овог реда, као и непрекидности скаларног производа. Ова једнакост нам показује да се координате вектора Af могу изразити преко координата самог вектора f кад се на њега примени матрична трансформација, тј. множење (са леве стране) матрицом $\mathtt{Mat}A$.

Теорема 11.18. ***Уколико је*** $\{e_i\}_{i=1}^d$ ***ортонормирана база Hilbert-овог простора*** H, ***онда бијекција*** $A \mapsto \mathtt{Mat}A$ ***представља изометрички изоморфизам инволутивних Banach-ових алгебри*** $\mathcal{B}(H)$ ***и*** $\mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$.

$\triangle$ Ако је U изометрички изоморфизам простора H и $\mathbb{C}^d$ из теореме 10.29, тада је $\mathtt{Mat}A = UAU^{-1}$ за свако $A \in \mathcal{B}(H)$. Тако је $\mathtt{Mat}^{-1}(M) = U^{-1}MU$ за сваку матрицу $M \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$, линеарност $\mathtt{Mat}$ је очита, сагласност са множењем следи из $\mathtt{Mat}(AB) = UABU^{-1} = UAU^{-1}UBU^{-1} = \mathtt{Mat}A\,\mathtt{Mat}B$ за $A, B \in \mathcal{B}(H)$, док $(\mathtt{Mat}A)^* = (UAU^{-1})^* = UA^*U^{-1} = \mathtt{Mat}A^*$ показује сагласносност $\mathtt{Mat}$ са адјунговањем у $\mathcal{B}(H)$. За доказ изометричности $\mathtt{Mat}$ уочимо да је
$$\|\mathtt{Mat}A\| = \sup_{\|f\|_{\mathbb{C}^d}=1} \left\|UAU^{-1}f\right\|_{\mathbb{C}^d} = \sup_{\|U^{-1}f\|=1} \left\|AU^{-1}f\right\| = \|A\|,$$
јер f и $U^{-1}f$ упоредо описују јединичне сфере у $\mathbb{C}^d$ и H редом. $\square$

Како се на овај начин питање ограничености оператора може свести на испитивање ограничености придружене му матрице, некад нам од користи може бити и следећи тест који обезбеђује довољне услове за то.

Теорема 11.19. **[Schur-ов тест]** ***Ако је*** $a_{ij} = h_{ij}k_{ij}$ ***за свако*** $1 \le i, j \le d$, ***а*** $C = \sup_{1\le j\le d} \sum_{i=1}^d |h_{ij}|^2$ ***и*** $D = \sup_{1\le i\le d} \sum_{j=1}^d |k_{ij}|^2$ ***коначни, тад је*** $[a_{ij}]_{i,j=1}^d$ ***ограничена матрица норме не веће од*** $\sqrt{CD}$.

Како матричне трансформације могу бити посматране и као специјални случајеви интегралних трансформација, те како се у нашем конкретном случају тиме доказ само незнатно усложњава, претходно тврђење размотрићемо и у свом општијем облику.

Дефиниција 11.1. *Ако је μ сигма коначна мера на Ω, а k нека $\mu \times \mu$ мерљива функција на $\Omega \times \Omega$ за коју је*

$$\int_\Omega \int_\Omega |k(x,y) f(y) g(x)| \, d\mu(x)\, d\mu(y) < +\infty, \qquad \text{као и}$$

$$\Big| \int_\Omega \int_\Omega k(x,y) f(y) \overline{g(x)} \, d\mu(x)\, d\mu(y) \Big|^2 \leq M \int_\Omega |f(x)|^2 \, d\mu(x) \int_\Omega |g(x)|^2 \, d\mu(x)$$

за све $f, g \in \boldsymbol{L}^2(\Omega,\mu)$ при неком $M \geq 0$, онда се каже да је формулом

$$(Kf)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega k(x,y) f(y)\, d\mu(y) \qquad \text{за све } f \in \boldsymbol{L}^2(\Omega,\mu) \text{ и } x \in \Omega$$

задат ***правилан интегрални оператор*** *K чија је сесквилинеарна форма*

$$\langle Kf, g\rangle = \int_\Omega \int_\Omega k(x,y) f(y) \overline{g(x)} \, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

Теорема 11.20. ***Нека је μ сигма коначна мера на Ω, а k и h нека су $\mu \times \mu$ мерљиве функције на $\Omega \times \Omega$ за које је***

$$\int_\Omega |h(x,y)|^2 \, d\mu(x) \leq C < +\infty \qquad \text{за } [\mu] \text{ скоро свако } y \in \Omega \text{ и}$$

$$\int_\Omega |k(x,y)|^2 \, d\mu(y) \leq D < +\infty \qquad \text{за } [\mu] \text{ скоро свако } x \in \Omega.$$

Тада је са

$$(Af)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega h(x,y) k(x,y) f(y)\, d\mu(y) \qquad \text{за све } f \in \boldsymbol{L}^2(\Omega,\mu) \text{ и } x \in \Omega$$

дат правилан интегрални оператор $A \in \mathfrak{B}(\boldsymbol{L}^2(\Omega,\mu))$ норме $\|A\| \leq \sqrt{CD}$.

$\triangle$ На основу Cauchy-Schwarz-ове неједнакости (10.8) за Hilbert-ов простор $\boldsymbol{L}^2(\Omega,\mu)$ и Fubini-јеве теореме 4.29 добијамо да је

$$\begin{aligned}
\|Af\|^2 &= \int_\Omega |(Af)(x)|^2 \, d\mu(x) = \int_\Omega \Big| \int_\Omega h(x,y) k(x,y) f(y)\, d\mu(y) \Big|^2 d\mu(x) \\
&\leq \int_\Omega \int_\Omega |h(x,y) f(y)|^2 \, d\mu(y) \int_\Omega |k(x,y)|^2 \, d\mu(y)\, d\mu(x) \\
&\leq D \int_\Omega \int_\Omega |h(x,y) f(y)|^2 \, d\mu(y)\, d\mu(x) \\
&= D \int_\Omega \int_\Omega |h(x,y)|^2 \, d\mu(x)\, |f(y)|^2 \, d\mu(y) \leq CD \int_\Omega |f(y)|^2 \, d\mu(y) = CD\, \|f\|^2. \quad \square
\end{aligned}$$

Наводимо примере примене Schur-овог теста.

Теорема 11.21. ***Ако је*** $g \in \boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^d)$***, тада је са***

$$(Gf)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} g(x-y)f(y)\,dm_d(y) \qquad \textit{за све } f \in \boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^d) \textit{ и } x \in \mathbb{R}^d$$

дат правилан конволуциони интегрални оператор на $\boldsymbol{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ***норме не веће од*** $\|g\|_{\boldsymbol{L}^1(\mathbb{R}^d)}$.

△ За функције $h(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{|g(x-y)|}$ и $k(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g(x-y)}{\sqrt{|g(x-y)|}}$ важи

$$\int_{\mathbb{R}^d} |h(x,y)|^2\,dm_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|\,dm_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|\,dm_d(x) = \|g\|_1$$

за свако $y \in \mathbb{R}^d$, као и $\int_{\mathbb{R}^d} |k(x,y)|^2\,dm_d(y) = \|g\|_1$ за свако $x \in \mathbb{R}^d$. На основу Shur-овог теста одатле закључујемо да је $\|G\| \le \sqrt{\|g\|_1^2} = \|g\|_1$. □

Став 11.22. [Hilbert-ов оператор] ***Hilbert-ов оператор***

$$Hf(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y}\,dy \qquad \textit{за све } f \in \boldsymbol{L}^2(0,+\infty) \textit{ и } x \in (0,+\infty),$$

је правилан интегрални оператор на $\boldsymbol{L}^2(0,+\infty)$ ***норме не веће од*** π.

△ На основу Cauchy-Schwarz-ове неједнакости за простор $\boldsymbol{L}^2(0,+\infty)^2$ и Fubini-јеве теореме 4.29 за свако $f, g \in \boldsymbol{L}^2(0,+\infty)$ важи процена за норму придружене сесквилинеарне форме:

$$\begin{aligned}
\big|\langle Hf, g\rangle\big| &= \Big|\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(y)\overline{g(x)}}{x+y}\,dx\,dy\Big| \\
&= \Big|\int_0^\infty \int_0^\infty f(y)\sqrt[4]{\frac{y}{x(x+y)^2}}\,\overline{g(x)}\sqrt[4]{\frac{x}{y(x+y)^2}}\,dx\,dy\Big| \\
&\le \sqrt{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(y)|^2}{x+y}\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx\,dy}\sqrt{\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|g(x)|^2}{x+y}\sqrt{\frac{x}{y}}\,dy\,dx} \\
&= \pi\sqrt{\int_0^\infty |f(y)|^2\,dy}\sqrt{\int_0^\infty |g(x)|^2\,dx} = \pi\,\|f\|\,\|g\|,
\end{aligned}$$

будући да је

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+y}\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2}\,\frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \pi \qquad \text{за свако } y \in (0,+\infty).$$

Више од овде наведеног, показује се да је $\|H\|$ управо једнака π. □