10. Доказати да сваки ограничен низ вектора у рефлексивном Banach-овом простору садржи подниз који слабо конвергира.
11. Наћи пример низа $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ у $\boldsymbol{C}[a,b]$ који слабо конвергира ка $f \in \boldsymbol{C}[a,b]$ такав да $\|f_n\|_u \to \|f\|_u$ кад $n \to \infty$, али да $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ не конвергира ка f по норми.
12. Дати кратак доказ става 8.26 у случају $p = 2$.
13. Показати да на простору $\boldsymbol{C}[0,1]$ низ функционала датих са:
$$g_n^\star f \stackrel{\text{def}}{=} n\int_0^1 x^n f(x)\,dx \qquad \text{за све } f \in \boldsymbol{C}[0,1] \text{ и свако } n \in \mathbb{N},$$
слабо конвергира и наћи његов гранични функционал. Да ли тај низ функционала конвергира по норми у $\boldsymbol{C}[0,1]^\star$?

5. Конјуговани оператор на Banach-овом простору

Нека су X и Y нормирани простори и $A \in \mathcal{B}(X,Y)$. Нека је $f^\star \in Y^\star$ произвољан ограничен линеаран функционал на Y. Тада је са $g^\star(x) \stackrel{\text{def}}{=} f^\star(Ax)$ за свако $x \in X$ задан један ограничен линеаран функционал на X, будући да је $g^\star = f^\star A$ композиција два ограничена линеарна пресликавања. При томе важи $\|g^\star\| = \|f^\star A\| \leq \|f^\star\|\,\|A\|$. На овај начин сваком $f^\star \in Y^\star$ доделили смо један $g^\star \in X^\star$, чије се дејство (на X) описује са $g^\star(x) = f^\star(Ax)$. Ово придруживање $f^\star \mapsto g^\star$ означићемо мо са $A^\star$, тј. имамо следећу дефиницију:

Дефиниција 8.10. *Пресликавање $A^\star : Y^\star \to X^\star : f^\star \to f^\star A$, дакле дато са*
$$A^\star f^\star \stackrel{\text{def}}{=} f^\star A \qquad \textbf{\textit{за свако}}\ f^\star \in Y^\star,$$
*назива се **конјугованим оператором** оператора A.*

$A^\star$ је линеаран оператор, јер је за све $f^\star, g^\star \in Y^\star$ и све $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$
$$A^\star(\alpha f^\star + \beta g^\star) = (\alpha f^\star + \beta g^\star)A = \alpha f^\star A + \beta g^\star A = \alpha A^\star f^\star + \beta A^\star g^\star.$$

И следеће две особине конјугованог оператора директно следе из његове дефиниције: $(\alpha A)^\star = \alpha A^\star$ за све $\alpha \in \mathbb{K}$ и $(A+B)^\star = A^\star + B^\star$.

Став 8.28. ***За сваки ограничен оператор*** $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ ***и његов конјуговани оператор*** $A^\star$ ***је и сам ограничен линеарни оператор, тј.*** $A^\star \in \mathcal{B}(Y^\star, X^\star)$ ***и важи*** $\|A^\star\| = \|A\|$.

$\triangle$ Да је $A^\star$ линеаран смо видели раније. Покажимо још да је $\|A^\star\| = \|A\|$.

Како је $\|A^\star f^\star\| = \|f^\star A\| \leq \|A\|\,\|f^\star\|$ за свако $f^\star \in Y^\star$, следи да је $\|A^\star\| \leq \|A\|$, па је $A^\star$ ограничен оператор.

Покажимо да важи и $\|A^\star\| \geq \|A\|$. Ако је $Ax \neq 0$ за неко $x \in X$, тада према ставу 8.4 постоји функционал $f_{Ax}^\star \in Y^\star$ такав да је $f_{Ax}^\star(Ax) = \|Ax\|$ и $\|f_{Ax}^\star\| = 1$. Како је $f_{Ax}^\star(Ax) = (A^\star f_{Ax}^\star)(x)$, онда важи
$$\|Ax\| = f_{Ax}^\star(Ax) = (A^\star f_{Ax}^\star)(x) \leq \|A^\star\|\,\|f_{Ax}^\star\|\,\|x\| = \|A^\star\|\,\|x\|.$$
Како ова неједнакост очигледно важи и када је $Ax = 0$, онда важи и за свако $x \in X$, па из ње следи тражено $\|A\| \leq \|A^\star\|$. $\square$