$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x_n(\tau)y(\tau)\,d\tau = \int_a^b x_0(\tau)y(\tau)\,d\tau$ је за све $y\in \boldsymbol{L}^q(a,b)$, где су p и q индекси спрегнути условом $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. То значи да ако y припада скупу $\boldsymbol{\Pi}_{00}\subset \boldsymbol{L}^q(a,b)$ свих карактеристичних функција облика $\chi_{[a,t)}$ за неко $t\in[a,b]$, тада важи $\lim_{n\to\infty}\int_a^t x_n(\tau)\,d\tau = \int_a^t x_0(\tau)\,dt$, тј. испуњен је услов 2°.

Да су услови 1° и 2° довољни следиће на основу става 8.21 ако у њему у својству фундаменталног скупа одаберемо скуп $\boldsymbol{\Pi}_0^\star \overset{\text{def}}{=} \{f^\star_{c,d} : [c,d)\subset[a,b]\}$ свих линеарних функционала $f^\star_{c,d}$ на $\boldsymbol{L}^p(a,b)^\star$ придружених карактеристичним функцијама $\chi_{[c,d)}\in \boldsymbol{L}^q(a,b)$ за $[c,d)\subset[a,b]$, тј. функционала датих формулама

$$f^\star_{c,d}(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \chi_{[c,d)}(\tau)x(\tau)\,d\tau \qquad \text{за све } x\in \boldsymbol{L}^p(a,b).$$

Како је линеал над $\big\{\chi_{[c,d)} : [c,d)\subset[a,b]\big\}$ управо простор $\boldsymbol{\Pi}_0$ свих степенастих функција, који је густ у $\boldsymbol{L}^q(a,b)$ на основу става 5.13, те како према теореми 8.18 имамо $\boldsymbol{L}^p(a,b)^\star\approx \boldsymbol{L}^q(a,b)$, то је линеал над $\boldsymbol{\Pi}_0^\star$ такође густ у $\boldsymbol{L}^p(a,b)^\star$. Како је $f^\star_{c,d}=f^\star_{a,d}-f^\star_{a,c}$, то на основу својства 2° закључујемо да $f^\star_{c,d}(x_n)\to f^\star_{c,d}(x)$ кад $n\to\infty$ за свако $f^\star_{c,d}\in\boldsymbol{\Pi}_0^\star$, па применом става 8.21 добијамо коначно да низ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ слабо конвергира ка x у $\boldsymbol{L}^p(a,b)$. □

Посебно је једноставно описати однос између слабе и јаке конвергенције на просторима $\boldsymbol{\ell}^p$ и $\boldsymbol{L}^p(X,\mu)$ за $1<p<+\infty$.

Став 8.26. ***За свако*** $1<p<+\infty$ ***низ*** $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ***јако конвергира ка*** f ***у простору*** $\boldsymbol{L}^p(X,\mu)$ ***ако и само ако***

1° $f_n \xrightarrow{w} f$ ***кад*** $n\to\infty$,
2° $\|f_n\|_p\to\|f\|_p$ ***кад*** $n\to\infty$.

Са $\|\cdot\|_p$ је у претходном тврђењу означена норма у $\boldsymbol{L}^p(X,\mu)$. Ово тврђење, које важи и у комплексном случају, ћемо доказати само за реалне просторе $\boldsymbol{L}^p(X,\mu)$. У доказу ћемо користити следећу елементарну неједнакост.

Лема 8.27. ***Нека је*** $1<p<+\infty$***. Тада постоји константа*** $c>0$ ***таква да је***

$$|1+x|^p \ge 1+px+c\theta(x), \qquad \textbf{\textit{за свако }} x\in\mathbb{R}, \tag{8.19}$$

где је $\theta(x)\overset{\text{def}}{=}|x|^p$ ***у случају*** $p\ge 2$ ***и***

$$\theta(x)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}|x|^2, & \textbf{\textit{за }} |x|<1,\\ |x|^p, & \textbf{\textit{за }} |x|\ge 1,\end{cases} \qquad \textbf{\textit{у случају }} 1<p<2.$$

△ Посматрајмо функције $\psi(x)\overset{\text{def}}{=}|1+x|^p-1-px$ и $\varphi(x)\overset{\text{def}}{=}\psi(x)/\theta(x)$. Како је $\theta(x)=x^2$ у околини нуле, следи да је $\lim_{x\to0}\varphi(x)=p(p-1)/2>0$ за $1<p<2$ и $\lim_{x\to0}\varphi(x)=+\infty$ за $p\ge2$, а како је $\theta(x)=|x|^p$ за $|x|\ge1$, следи да је $\lim_{x\to\pm\infty}\varphi(x)=1$. Значи да постоје $0<m\le M<+\infty$ такви да је $\varphi(x)\ge c$ за све $|x|\le m$ и за све $|x|\ge M$. С друге стране, испитивањем првог извода функције ψ закључујемо да ψ има јединствен минимум у тачки $x=0$, па је зато $\psi(x)>0$ за свако $x\ne0$. Дакле, $\varphi(x)>0$ за свако x, специјално $\varphi(x)>0$ на компакту $[-M,-m]\cup[m,M]$. Како φ достиже минимум на том компакту, смањујући $c>0$ ако је потребно, можемо сматрати да је $\varphi(x)>c$ и за $m\le|x|\le M$. Обзиром на дефиницију функције φ, ово доказује неједнакост (8.19). □