Став 8.22. ***Потребни и довољни услови да низ $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ вектора из $\boldsymbol{\ell}^p$ за $1 < p < +\infty$ облика $\boldsymbol{x}_n \stackrel{\text{def}}{=} (x_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ за $n \in \mathbb{N}$ слабо конвергира ка $\boldsymbol{x}_0 \stackrel{\text{def}}{=} (x_0^{(k)})_{k=1}^{\infty} \in \boldsymbol{\ell}^p$ су:***

1° $\sup_{n\geq 1} \|\boldsymbol{x}_n\|_p < +\infty$,

2° $\lim_{n\to\infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)}$ ***за свако*** $k \in \mathbb{N}$.

△ Услови 1° и 2° су потребни; први на основу става 8.20, а други јер се $\lim_{n\to\infty} f^\star(\boldsymbol{x}_n) = f^\star(\boldsymbol{x}_0)$ своди на 2°, ако за свако $k \in \mathbb{N}$ у својству $f^\star$ бирамо редом функционале $\{\boldsymbol{e}_k^\star\}_{k=1}^{\infty}$ дате са $\boldsymbol{e}_k^\star(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} x^{(k)}$ за све $\boldsymbol{x} \stackrel{\text{def}}{=} (x^{(k)})_{k=1}^{\infty} \in \boldsymbol{\ell}^p$.

Да су услови 1° и 2° довољни следи на основу става 8.21, будући да је скуп функционала $\{\boldsymbol{e}_k^\star : k \in \mathbb{N}\}$ фундаменталан у $(\boldsymbol{\ell}^p)^\star$ $(\approx \boldsymbol{\ell}^{\frac{p}{p-1}})$. □

Напомена 8.23. Може се показати (мада не сасвим једноставно) да су на $\boldsymbol{\ell}^1$ слаба и јака конвергенција низова еквивалентне (теорема Schur[4]-а).

Став 8.24. ***Потребни и довољни услови да би низ непрекидних функција $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ у $\boldsymbol{C}[a,b]$ слабо конвергирао ка функцији $g_0 \in \boldsymbol{C}[a,b]$ јесу:***

1° $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_{\boldsymbol{C}[a,b]} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \max_{x\in[a,b]} |g_n(x)| < +\infty$,

2° $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g_0(x)$ ***за свако*** $x \in [a,b]$.

△ Неопходност услова 1° следи на основу става 8.20. Како $g_n \xrightarrow{w} g_0$ кад $n \to \infty$, то значи да за свако $f^\star \in \boldsymbol{C}[a,b]^\star$ важи $f^\star(g_n) \to f^\star(g_0)$ кад $n \to \infty$, па специјално и за функционале (евалуације) дефинисане са

$$f_{x_0}^\star(g) \stackrel{\text{def}}{=} g(x_0) \qquad \text{за све } g \in \boldsymbol{C}[a,b] \text{ и произвољно } x_0 \in [a,b].$$

Но то значи да $\lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = g(x_0)$ за свако $x_0 \in [a,b]$, чиме је неопходност услова 2° показана.

С друге стране, на основу последице 6.33 услови 1° и 2° омогућавају да се за свако $f \in \boldsymbol{NBV}[a,b]$ у $\int_a^b g_n(x)\,df(x)$ прође лимесом под знак интеграла, тј.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,df(x) = \int_a^b g_0(x)\,df(x) \qquad \text{за сваку функцију } f \in \boldsymbol{NBV}[a,b].$$

Имајући у виду теорему 8.16 о репрезентацији линеарних функционала на $\boldsymbol{C}[a,b]$, последња једнакост се може записати у облику $\lim_{n\to\infty} f^\star(g_n) = f^\star(g_0)$ за сваки $f^\star \in \boldsymbol{C}[a,b]^\star$, тј. $g_n \xrightarrow{w} g_0$ кад $n \to \infty$. □

Став 8.25. ***За свако $1 < p < +\infty$ потребни и довољни услови да би низ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ у $\boldsymbol{L}^p(a,b)$ слабо конвергирао ка $x \in \boldsymbol{L}^p(a,b)$ јесу:***

1° $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{\boldsymbol{L}^p(a,b)} < +\infty$,

2° $\lim_{n\to\infty} \int_a^t x_n(\tau)\,d\tau = \int_a^t x_0(\tau)\,d\tau$ ***за свако*** $t \in [a,b]$.

△ Услов 1° је неопходан према ставу 8.20. Ради доказа неопходности услова 2° приметимо прво да ће на основу става 8.18 низ функција $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ у простору $\boldsymbol{L}^p(a,b)$ слабо конвергирати ка x_0 ако и само ако је задовољено

[4] Шур– Issai Schur (1875-1941)