парцијална сума одговарајућег Fourier-овог реда за свако $m \in \mathbb{N}$, онда је

$$F_m(x)(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{2m+1}{2}(s-t)}{2 \sin \frac{s-t}{2}} x(t)\, dt.$$

б) Користећи претходни задатак доказати да сваки од функционала $f_m^\star \in \boldsymbol{C}[-\pi,\pi]^\star$ дефинисан са

$$f_m^\star(x) \stackrel{\text{def}}{=} \big(F_m(x)\big)(s) \text{ за све } x \in \boldsymbol{C}[-\pi,\pi] \text{ и свако } s \in [-\pi,\pi],$$

има норму $\left\| f_m^\star \right\| = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\sin(m+1/2)t}{\sin t/2} \right| dt$.

в) Показати да постоји константа $c_0 > 0$, независна од m и s, таква да важи $\left\| f_m^\star \right\| \geq c_0 \log m$.

г) На основу претходно доказаног и теореме 7.9 Banach-Steinhaus-а показати да за свако $s \in [-\pi,\pi]$ постоји непрекидна функција x на одсечку $[-\pi,\pi]$ чији Fourier-ов ред у тачки s дивергира.

4. Показати да су потребни и довољни услови да би матрицом $A = [a_{mn}]_{m,n=1}^\infty$ и формулом

$$A - \lim_{n\to\infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^\infty a_{mn} x_n \qquad \text{за све } (x_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{c}_0$$

била дефинисана регуларна A збирљивост на $\mathfrak{c}_0$:

а) ред $\sum_{n=1}^\infty a_{mn}$ апсолутно конвергира за свако $m \in \mathbb{N}$,

б) $\sup_{m\geq 1} \sum_{n=1}^\infty |a_{mn}|$ је коначан,

в) $\lim_{m\to\infty} a_{mn} = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

4. Слаба конвергенција у Banach-овим просторима

Свуда у тексту овог одељка подразумевамо да је простор X Banach-ов. Раније смо се упознали са конвергенцијом по норми простора X коју још зовемо и **јака конвергенција**. Сада ћемо увести једну другачију врсту конвергенције низова елемената у X.

Дефиниција 8.8. *За дати низ елемената $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ у X кажемо да* ***слабо конвергира*** *елементу $x_0 \in X$ ако је $\lim_{n\to\infty} f^\star(x_n) = f^\star(x_0)$ за свако $f^\star \in X^\star$.*

Чињеницу да низ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ слабо ковергира ка x_0 записиваћемо са $x_n \xrightarrow{w} x_0$ или са $w - \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Слаби лимес датог низа јединствен, увек када постоји. Претпоставимо ли супротно да је и $y_0 = w - \lim_{n\to\infty} x_n$ за неко $y_0 \in X$ различито од x_0, имали бисмо према последици 8.5 функционал $f_{x_0-y_0}^\star \in X^\star$ такав да је $\left\| f_{x_0-y_0}^\star \right\| = 1$ и $f_{x_0-y_0}^\star(x_0-y_0) = \|x_0-y_0\| \neq 0$. Али за њега би тада важило и

$$f_{x_0-y_0}^\star(x_0-y_0) = f_{x_0-y_0}^\star(x_0) - f_{x_0-y_0}^\star(y_0) = \lim_{n\to\infty} f_{x_0-y_0}^\star(x_n) - \lim_{n\to\infty} f_{x_0-y_0}^\star(x_n) = 0,$$

што би била контрадикција.

Из неједнакости $|f^\star(x_n) - f^\star(x)| \leq \|f^\star\| \, \|x_n - x_0\|$ за сваки $f^\star \in X^\star$ следи да јака конвергенција повлачи слабу. Обрнуто не мора бити тачно, што показује следећи пример.

Пример 8.6. Нека је $X = \boldsymbol{\ell}^2$ и низ елемената $\boldsymbol{e}_n \stackrel{\text{def}}{=} (\overbrace{0,0,\ldots,0}^{n-1},1,0,\ldots) \in \boldsymbol{\ell}^2$. Овај низ не конвергира јако у $\boldsymbol{\ell}^2$ јер је $\|\boldsymbol{e}_n - \boldsymbol{e}_m\|_2 = \sqrt{2}$ за свако $n \neq m$. Ако је $f^\star \in \big(\boldsymbol{\ell}^2\big)^\star$, тада на основу става 8.14 за свако $x \stackrel{\text{def}}{=} (x_n)_{n=1}^\infty \in \boldsymbol{\ell}^2$ имамо да важи