

Како су x_n ограничене мерљиве функције, то према раније доказаном важи $f^*(x_n) = \int_a^b x_n(t)f(t) dt$. Имајући у виду да $\|x_n - x\|_{L^p(a,b)} \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, као и да $f^* \in L^p(a,b)^*$, коначно добијамо $f^*(x) = \int_a^b x(t)f(t) dt$. Дакле сваки функционал $f^* \in L^p(a,b)^*$ је облика $f^*(x) = \int_a^b x(t)f(t) dt$ за све $x \in L^p(a,b)$ за неко $f \in L^q(a,b)$. Да је тачно и обрнуто, тј. да свака функција $f \in L^q(a,b)$ генерише функционал $f^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b x(t)f(t) dt$ који припада $L^p(a,b)^*$ директно проверавамо помоћу Hölder-ове неједнакости (5.5). Заиста, из

$$|f^*(x)| = \left| \int_a^b x(t)f(t) dt \right| \leq \sqrt[p]{\int_a^b |x(t)|^p dt} \sqrt[q]{\int_a^b |f(t)|^q dt} = \|x\| \|f\|_{L^q(a,b)},$$

добија се $\|f^*\| \leq \|f\|_{L^q(a,b)}$. Обрнута неједнакост је већ била доказана, па дакле важи једнакост $\|f^*\| = \|f\|_{L^q(a,b)}$. Непосредно се проверава да функционал f^* достиже своју норму на функцији $|f|^{q-1} \text{sgn} f \in L^p(a,b)$, а читаоцу се препушта да установи једнозначност кореспонденције $f^* \longleftrightarrow f$. $\square$

Понављањем у великој мери доказа теореме 8.18 може се доказати

ТЕОРЕМА 8.19. *Ограничен линеаран функционал f^* на простору $L^1(a,b)$ има репрезентацију*

$$f^*(x) = \int_a^b x(t)f(t) dt \quad \text{за све } x \in L^1(a,b), \quad (8.18)$$

где је $f \in L^\infty(a,b)$ и $\|f^*\| = \|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$. Функционалом f^* на $L^1(a,b)$ једнозначно је одређена функција $f \in L^\infty(a,b)$ за коју важи релација (8.18).

Из теорема 8.13, 8.14, 8.18, 8.19 следе закључци $(\ell^1)^* \approx \ell^\infty$, $(\ell^p)^* \approx \ell^q$ за $1 < p < +\infty$, $L^p(a,b)^* \approx L^q(a,b)$ за $1 < p < +\infty$ и $L^1(a,b)^* \approx L^\infty(a,b)$ респективно. Но како је $(\ell^p)^{**} \approx (\ell^q)^* \approx \ell^p$ према теорему 8.14, док сагласно теорему 8.18 важи и $(L^p(a,b))^{**} \approx L^q(a,b)^* \approx L^p(a,b)$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, закључујемо да су простори ℓ^p и $L^p(a,b)$ рефлексивни за све $1 < p < +\infty$. Може се показати да $C[a,b]$ није рефлексиван простор.

Вежбања 8.3.

- Ако је Y прави затворен подпростор од $L^p(\mu)$ за неко $1 < p < +\infty$, онда постоји $f \in L^p(\mu)$ такво да је $\|f\| = 1$ и $\|f - g\| \geq 1$ за свако $g \in Y$. Тврђење важи за Banach-ов простор X уместо $L^p(\mu)$ ако и само ако X има својство да сваки ограничен линеаран функционал $f^* \in X^*$ достиже максимум на $\overline{B}_X$ (на основу једне теореме R. C. James-а Banach-ов простор има то својство ако и само ако је рефлексиван).
- Израчунати $\|f^*\|$ из примера 8.4.
- а) Ако су $a_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt dt$ и $b_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin kt dt$ Fourier-ови коефицијенти функције $x \in C[-\pi, \pi]$ и ако је $F_m(x)(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k \cos ks + b_k \sin ks)$