$f \overset{\text{def}}{=} g' \in \boldsymbol{L}^1(a,b)$ и важи Newton-Leibniz-ова формула $g(t) - g(a) = \int_a^t f(\tau)\,d\tau$. Како је $g(a) = f^\star(\chi_{[a,a)}) = f^\star(0) = 0$ добијамо $g(t) = \int_a^t f(\tau)\,d\tau$. Дакле

$$f^\star(\chi_{[a,t)}) = g(t) = \int_a^t f(\tau)\,d\tau = \int_a^b \chi_{[a,t)}(\tau) f(\tau)\,d\tau.$$

За сваку степенасту функцију $x \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n c_k \chi_{[t_{k-1},t_k)}$ и придружену јој поделу $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ имамо сада да због линеараности $f^\star$ важи формула (8.17). За Borel-ов скуп A у $[a,b]$ имамо апроксимирајући низ елементарних скупова $(E_n)_{n=1}^\infty$ такав да $m(E_n \triangle A) \to 0$ кад $n \to \infty$. Како из тога произилази да $\|\chi_{E_n} - \chi_A\|_p = \|\chi_{E_n \triangle A}\|_p = \sqrt[p]{m(E_n \triangle A)} \to 0$ кад $n \to \infty$, то постоји подниз $\big(\chi_{E'_n}\big)_{n=1}^\infty$ низа $(\chi_{E_n})_{n=1}^\infty$ који ковергира ка χ_A скоро свуда. Како је функција f интеграбилна доминанта низа $\big(f\chi_{E'_n}\big)_{n=1}^\infty$, то на основу теореме 4.22 Lebesgue-а о доминантној конвергенцији следи $\lim_{n\to\infty}\int_a^b \chi_{E'_n}(\tau) f(\tau)\,d\tau = \int_a^b \chi_A(\tau) f(\tau)\,d\tau$. Са друге стране, због чињенице да су $\chi_{E'_n}$ степенасте функције јер су скупови E'_n елементарни, исти лимес мора се поклапати са $\lim_{n\to\infty} f^\star(\chi_{E'_n}) = f^\star(\chi_A)$ због непрекидности $f^\star$. Дакле, формула (8.17) важи за карактеристичне функције мерљивих скупова, а по линеарности и за све просте функције.

Нека је сада x произвољна ограничена мерљива функција. Тада из става 5.13 следи да постоји низ простих функција s_n такав да $s_n \to x$ у простору $\boldsymbol{L}^p(a,b)$ и да је $\|s_n\|_\infty \le \|x\|_\infty$. У том случају, опет по теореми 4.22 Lebesgue-а о доминантној конвергенцији, имамо $\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(\tau) f(\tau)\,d\tau = \int_a^b x(\tau) f(\tau)\,d\tau$. Како је $f^\star$ ограничен функционал, пуштањем да $n \to \infty$ из низа једнакости $f^\star(s_n) = \int_a^b s_n(\tau) f(\tau)\,d\tau$ за све $n \in \mathbb{N}$ добијамо једнакост $f^\star(x) = \int_a^b x(t) f(t)\,dt$, која важи за све ограничене функције x.

Нека је сада низ функција $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ дефинисан на следећи начин:

$$x_n(t) \overset{\text{def}}{=} |f(t)|^{q-1} \chi_{|f|^{-1}([0,n])} \operatorname{sgn} f(t) = \begin{cases} |f(t)|^{q-1} \operatorname{sgn} f(t) & \text{кад је } |f(t)| \le n \\ 0 & \text{кад је } |f(t)| > n, \end{cases}$$

где је $q = \frac{p}{p-1}$ конјуговани индекс. Функција x_n је ограничена и мерљива, па је $f^\star(x_n) = \int_a^b x_n(t) f(t)\,dt$ и

$$\|f^\star\|\,\|x_n\| \ge |f^\star(x_n)| = f^\star(x_n) = \int_a^b x_n(t) f(t)\,dt = \int_a^b |x_n(t)|^p\,dt = \|x_n\|^p.$$

Одатле следи $\|x_n\|_p^{p-1} \le \|f^\star\|$, што се може записати и у еквивалентном облику $\int_a^b |x_n(t)|^p\,dt \le \|f^\star\|^q$, па како $|x_n(t)| \to |f(t)|^{q-1}$ скоро свуда када $n \to \infty$, то се применом Fatou-ове леме добија $\int_a^b |f(t)|^{p(q-1)}\,dt \le \|f^\star\|^q$, одакле закључујемо да важи $\|f\|_{\boldsymbol{L}^q(a,b)} = \sqrt[q]{\int_a^b |f(t)|^q} \le \|f^\star\|$, па функција f припада $\boldsymbol{L}^q(a,b)$.

Нека је сада x произвољна функција из $\boldsymbol{L}^p(a,b)$. Тада постоји $\int_a^b x(t) f(t)\,dt$. Даље, постоји низ ограничених мерљивих функција $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ такав да важи $\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p\,dt \to 0$ кад $n \to \infty$. Коришћењем Hölder-ове неједнакости (5.5) добија се

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t) f(t)\,dt = \int_a^b x(t) f(t)\,dt.$$