Математика 1

предавања

Скупови

Шта је скуп?
Скуп се не дефинише. Скуп је основни појам који нам је "интуитивно" познат.

Пример 1

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$B = \{2, 4, 6, 8\}$,
$C = \emptyset$ празан скуп.

Скуп A је подскуп скупа B ($A \subset B$) ако је сваки елемент скупа A такође и елемент скупа B. Кажемо још и да је B надскуп скупа A.

Скупови A и B су једнаки ако имају исте елементе.
Скупови A и B су једнаки ако је $A \subset B$ и $B \subset A$.

Скупови

Дефиниција 1

Унија скупова A и B је скуп $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.'
Пресек скупова A и B је скуп $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

Пример 2

Одредити унију и пресек скупова $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

Скупови A и B су **дисјунктни** ако је $A \cap B = \emptyset$.

Дефиниција 2

Декартов производ скупова A и B је скуп свих уређених парова (a, b) таквих да је $a \in A$ и $b \in B$
$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$.

Пример 3

Одредити Декартов производ скупова $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 4\}$.

$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$.

Природни бројеви

Дефиниција 3

Скуп природних бројева је $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Број 0 **није** природан број. У скупу природних бројева $\mathbb{N}$ дефинисане су операције сабирања и множења.

$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и

$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Особине сабирања и множења

За свака три природна броја $x, y, z \in \mathbb{N}$ важи

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (асоцијативност сабирања)
2. $x + y = y + x$ (комутативност сабирања)
3. $(xy)z = x(yz)$ (асоцијативност множења)
4. $1x = x1 = x$ (неутрални елемент за множење)
5. $xy = yx$ (комутативност мнозења)
6. $x(y + z) = xy + xz$ (дистрибутивност множења према сабирању)

Нека je $a, b \in \mathbb{N}$. Да ли једначина $x + a = b$ има решења (по x) у скупу $\mathbb{N}$? Нема за све борјеве a и b. Из тог разлога проширујемо скуп природних бројева до скупа целих бројева.

Цели бројеви

Посматрајмо скуп $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Уводимо релацију $\sim$ са

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Теорема 1

Релација $\sim$ је релација еквиваленције, тј. $\sim$ је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

- Р $(a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow a + b = b + a.$
- С $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$
  $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a \Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$
- Т $(a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$
  $a + d = b + c \wedge c + f = d + e \Rightarrow a + d + c + f = b + c + d + e \Rightarrow a + f = b + e \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$

Цели бројеви

Нека је $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Посматрајмо скуп $[(a,b)] = \{(c,d) | (c,d) \sim (a,b)\}$.
Скуп $[(a,b)]$ назива се класа еквиваленције елемента (a,b). Пар (a,b) је представник класе $[(a,b)]$
Ако је $(a,b) \sim (c,d)$ онда је $[(a,b)] = [(c,d)]$.
Ако је $(a,b) \nsim (c,d)$ онда су $[(a,b)]$ и $[(c,d)]$ дисјунктни.
Скуп свих класа евиваленције $\{[(a,b)] | (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ се обележава са $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$. Скуп целих бројева је $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$.
Сабирање се у $\mathbb{Z}$ уводи као $[(a,b)] + [(c,d)] = [(a+c, b+d)]$.
Множење се у $\mathbb{Z}$ уводи као $[(a,b)][(c,d)] = [(ac+bd, ad+bc)]$.

Цели бројеви

Природан број n је представљен класом $[(n+1,1)]$.
Класа $[(1,1)]$ представља број 0. Која класа представља број -1?

За свака три цела броја $x, y, z \in \mathbb{Z}$ важи

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$ (асоцијативност сабирања)
2. $0+x = x+0 = x$ (0 је неутрални елемент за сабирање)
3. $(\forall x)(\exists -x) \quad x+(-x) = (-x)+x = 0$ (постојање супротног елемента)
4. $x+y = y+x$ (комутативност сабирања)
5. $(xy)z = x(yz)$ (асоцијативност множења)
6. Ако је $x \neq 0$, онда је $1x = x1 = x$ (неутрални елемент за множење)
7. $xy = yx$ (комутативност мнозења)
8. $x(y+z) = xy+xz$ (дистрибутивност множења према сабирању)

Математичка индукција

Математичка индукција је начин доказивања тврђења која се односе на природне бројеве. Ако је $T(n)$ тврђење које доказујемо, доказ се састоји из два дела.

1. База индукције - провера да важи $T(1)$.
2. Корак индукције - провера да ако важи $T(n)$ онда важи и $T(n+1)$ односно $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Предпоставка да важи $T(n)$ се зове индуктивна хипотеза.

Пример 4

Доказати да за све природне бројеве $n \in \mathbb{N}$ важи $1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.
Прво проверавамо да је тврђење тачно за $n=1$
$1=\frac{1}{2}1(1+1), \qquad 1=1.$
Предпоставимо да је тврђење тачно за неко $n \in \mathbb{N}$ (индуктивна хипотеза)
$1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$
треба доказати да тврђење важи за $n+1$ тј.
$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2).$
$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2).$

Пример 5

Доказати да за све природне бројеве $n \in \mathbb{N}$ важи
$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$.
Прво проверавамо да је тврђење тачно за $n = 1$
$1^3 = \left(\frac{1}{2}1(1+1)\right)^2$,
$1 = 1$.
Предпоставимо да је тврђење тачно за неко $n \in \mathbb{N}$ (индуктивна хипотеза)
$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$.
треба доказати да тврђење важи за $n+1$ тј.
$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right)^2$.

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 &= \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4n + 4) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right)^2. \end{aligned}$$

Рационални бројеви

Посматрајмо скуп $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Уводимо релацију $\sim$ са

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Теорема 2

Релација $\sim$ је релација еквиваленције, тј. $\sim$ је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

- Р $(a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow ab = ba.$
- С $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$
  $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$
- Т $(a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$
  $ad = bc \wedge cf = de \Rightarrow adcf = bcde \Rightarrow af = be \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$

Рационални бројеви

Скуп рационалних бројева је $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim$.
Сабирање се у $\mathbb{Q}$ уводи као $[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)]$.
Множење се у $\mathbb{Q}$ уводи као $[(a, b)][(c, d)] = [(ac, bd)]$.
Цео број n је представљен класом $[(n, 1)]$.

Рационални бројеви

За свака три рационална броја $x, y, z \in \mathbb{Q}$ важи

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$ (асоцијативност сабирања)
2. $0+x = x+0 = x$ (0 је неутрални елемент за сабирање)
3. $(\forall x)(\exists -x) \quad x+(-x) = (-x)+x = 0$ (постојање супротног елемента)
4. $x+y = y+x$ (комутативност сабирања)
5. $(xy)z = x(yz)$ (асоцијативност множења)
6. Ако је $x \neq 0$, онда је $1x = x1 = x$ (неутрални елемент за множење)
7. $(\forall x \neq 0)(\exists x^{-1}) \quad xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ (постојање инверзног елемента)
8. $xy = yx$ (комутативност мнозења)
9. $x(y+z) = xy+xz$ (дистрибутивност множења према сабирању)

Структура $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ је поље.

Нека су $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Свака линеарна једначина $ax+b=0$ има решење у скупу $\mathbb{Q}$.

Рационални бројеви

Да ли једначина $x^2 = 2$ има решење у скупу рационалних бројева?
Предпоставимо да је $x = \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ и да је $NZD(p, q) = 1$. Тада је

$\frac{p^2}{q^2} = 2$
$p^2 = 2q^2$
$p = 2p_1$
$4p_1^2 = 2q^2$
$2p_1^2 = q^2$
$q = 2q_1$
p и q су парни бројеви, што је контрадикција. $\sqrt{2}$ није рационалан број.

Реални бројеви

Реални бројеви су јединствени скуп бројева који задовољава следеће аксиоме

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$
2. $0+x = x+0 = x$
3. $(\forall x)(\exists -x) \quad x+(-x) = (-x)+x = 0$
4. $x+y = y+x$
5. $(xy)z = x(yz)$
6. $x \neq 0 \Rightarrow 1x = x1 = x$
7. $(\forall x \neq 0)(\exists x^{-1})\ xx^{-1} = x^{-1}x = 1$
8. $xy = yx$
9. $x(y+z) = xy+xz$
10. $x \leq x$
11. $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
12. $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
13. $x \leq y \vee y \leq x$
14. $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$
15. $0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$
16. аксиома супремума

Структура $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ је уређено поље. Приметимо да рационални бројеви задовољавају све аксиоме $1-15$.

Аксиома супремума

Аксиома супремума

Сваки скуп $A \subset \mathbb{R}$, који је непазан и ограничен одозго има супремум.

Број M је горња граница скупа A ако је за свако $a \in A$, $a \leq M$.
Посматрајмо скуп $A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$.
Која је горња граница скупа A? $M = \frac{3}{2}$.
Која је "идеална" горња граница скупа A?
То је број α такав да за свако $M < \alpha$, M **није** горња граница скупа A,тј. постоји $a \in A$ такво да је $M < a < \alpha$.Број α се назива супремум скупа A и пише $\alpha = \sup A$.

Комплексни бројеви

Посматрајмо скуп $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Сабирање се у $\mathbb{C}$ уводи као $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
Множење се у $\mathbb{C}$ уводи као $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Теорема 3

Скуп $\mathbb{C}$ са операцијама сабирања и множења чини поље.

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $0 + x = x + 0 = x$
3. $(\forall x)(\exists - x) \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$
4. $x + y = y + x$
5. $(xy)z = x(yz)$
6. $x \neq 0 \Rightarrow 1x = x1 = x$
7. $(\forall x \neq 0)(\exists x^{-1})\ xx^{-1} = x^{-1}x = 1$
8. $xy = yx$
9. $x(y + z) = xy + xz$

Комплексни бројеви

Приметимо да за парове облика $(a, 0)$ важи
$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ и
$(a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$.
Пресликавање $a \to (a, 0)$ нам омогућава да реалне бројеве третирамо као подскуп комплексних бројева.
Нека је $i = (0, 1)$ $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.
$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib$ - алгебарски запис комплексног броја
$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$.
$a = \Re(a + ib)$ - реални део комплексног броја.
$b = \Im(a + ib)$ - имагинарни део комплексног броја.
$\overline{a + ib} = a - ib$ - коњуговано комплексан број.
$z = a + ib \quad \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}$.