Математика 1

предавања

Скупови

Шта је скуп?
Скуп се не дефинише. Скуп је основни појам који нам је "интуитивно" познат.

Пример 1

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$B = \{2, 4, 6, 8\}$,
$C = \emptyset$ празан скуп.

Скуп A је подскуп скупа B ($A \subset B$) ако је сваки елемент скупа A такође и елемент скупа B. Кажемо још и да је B надскуп скупа A.

Скупови A и B су једнаки ако имају исте елементе.
Скупови A и B су једнаки ако је $A \subset B$ и $B \subset A$.

Скупови

Дефиниција 1

Унија скупова A и B је скуп $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.‘
Пресек скупова A и B је скуп $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

Пример 2

Одредити унију и пресек скупова $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

Скупови A и B су **дисјунктни** ако је $A \cap B = \emptyset$.

Дефиниција 2

Декартов производ скупова A и B је скуп свих уређених парова (a, b) таквих да је $a \in A$ и $b \in B$
$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$.

Пример 3

Одредити Декартов производ скупова $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 4\}$.

$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$.

Природни бројеви

Дефиниција 3

Скуп природних бројева је $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Број 0 **није** природан број. У скупу природних бројева $\mathbb{N}$ дефинисане су операције сабирања и множења.

$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и

$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

Особине сабирања и множења

За свака три природна броја $x, y, z \in \mathbb{N}$ важи

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (асоцијативност сабирања)
2. $x + y = y + x$ (комутативност сабирања)
3. $(xy)z = x(yz)$ (асоцијативност множења)
4. $1x = x1 = x$ (неутрални елемент за множење)
5. $xy = yx$ (комутативност множења)
6. $x(y + z) = xy + xz$ (дистрибутивност множења према сабирању)

Нека је $a, b \in \mathbb{N}$. Да ли једначина $x + a = b$ има решења (по x) у скупу $\mathbb{N}$? Нема за све борјеве a и b. Из тог разлога проширујемо скуп природних бројева до скупа целих бројева.

Цели бројеви

Посматрајмо скуп $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Уводимо релацију $\sim$ са

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Теорема 1

Релација $\sim$ је релација еквиваленције, тј. $\sim$ је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

P $(a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow a + b = b + a.$

C $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$
$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow c + b = d + a \Leftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$

T $(a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$
$a + d = b + c \wedge c + f = d + e \Rightarrow a + d + c + f = b + c + d + e \Rightarrow a + f = b + e \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$

Цели бројеви

Нека је $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Посматрајмо скуп $[(a, b)] = \{(c, d) | (c, d) \sim (a, b)\}$.
Скуп $[(a, b)]$ назива се класа еквиваленције елемента (a, b). Пар (a, b) је представник класе $[(a, b)]$
Ако је $(a, b) \sim (c, d)$ онда је $[(a, b)] = [(c, d)]$.
Ако је $(a, b) \nsim (c, d)$ онда су $[(a, b)]$ и $[(c, d)]$ дисјунктни.
Скуп свих класа евиваленције $\{[(a, b)] | (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ се обележава са $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$. Скуп целих бројева је $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$.
Сабирање се у $\mathbb{Z}$ уводи као $[(a, b)] + [(c, d)] = [(a + c, b + d)]$.
Множење се у $\mathbb{Z}$ уводи као $[(a, b)][(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)]$.

Цели бројеви

Природан број n је представљен класом $[(n+1,1)]$.
Класа $[(1,1)]$ представља број 0. Која класа представља број -1?

За свака три цела броја $x, y, z \in \mathbb{Z}$ важи

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$ (асоцијативност сабирања)
2. $0+x = x+0 = x$ (0 је неутрални елемент за сабирање)
3. $(\forall x)(\exists -x) \quad x+(-x) = (-x)+x = 0$ (постојање супротног елемента)
4. $x+y = y+x$ (комутативност сабирања)
5. $(xy)z = x(yz)$ (асоцијативност множења)
6. Ако је $x \neq 0$, онда је $1x = x1 = x$ (неутрални елемент за множење)
7. $xy = yx$ (комутативност множења)
8. $x(y+z) = xy+xz$ (дистрибутивност множења према сабирању)

Математичка индукција

Математичка индукција је начин доказивања тврђења која се односе на природне бројеве. Ако је $T(n)$ тврђење које доказујемо, доказ се састоји из два дела.

1. База индукције - провера да важи $T(1)$.
2. Корак индукције - провера да ако важи $T(n)$ онда важи и $T(n+1)$ односно $T(n) \Rightarrow T(n+1)$. Предпоставка да важи $T(n)$ се зове индуктивна хипотеза.

Пример 4

Доказати да за све природне бројеве $n \in \mathbb{N}$ важи $1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.
Прво проверавамо да је тврђење тачно за $n=1$
$1=\frac{1}{2}1(1+1), \qquad 1=1.$
Предпоставимо да је тврђење тачно за неко $n \in \mathbb{N}$ (индуктивна хипотеза)
$1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.
треба доказати да тврђење важи за $n+1$ тј.
$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.
$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

Пример 5

Доказати да за све природне бројеве $n \in \mathbb{N}$ важи
$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$.
Прво проверавамо да је тврђење тачно за $n = 1$
$1^3 = \left(\frac{1}{2}1(1+1)\right)^2$,
$1 = 1$.
Предпоставимо да је тврђење тачно за неко $n \in \mathbb{N}$ (индуктивна хипотеза)
$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$.
треба доказати да тврђење важи за $n + 1$ тј.
$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right)^2$.

$$
\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 &= \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4(n+1)) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2 + 4n + 4) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right)^2.
\end{aligned}
$$

Рационални бројеви

Посматрајмо скуп $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Уводимо релацију $\sim$ са

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Теорема 2

Релација $\sim$ је релација еквиваленције, тј. $\sim$ је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

P $(a,b) \sim (a,b) \Leftrightarrow ab = ba.$

C $(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$
$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow cb = da \Leftrightarrow (c,d) \sim (a,b)$

T $(a,b) \sim (c,d) \wedge (c,d) \sim (e,f) \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$
$ad = bc \wedge cf = de \Rightarrow adcf = bcde \Rightarrow af = be \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$

Рационални бројеви

Скуп рационалних бројева je $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim$.
Сабирање се у $\mathbb{Q}$ уводи као $[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)]$.
Множење се у $\mathbb{Q}$ уводи као $[(a, b)][(c, d)] = [(ac, bd)]$.
Цео број n je представљен класом $[(n, 1)]$.

Рационални бројеви

За свака три рационална броја $x, y, z \in \mathbb{Q}$ важи

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$ (асоцијативност сабирања)
2. $0+x = x+0 = x$ (0 је неутрални елемент за сабирање)
3. $(\forall x)(\exists -x) \quad x+(-x) = (-x)+x = 0$ (постојање супротног елемента)
4. $x+y = y+x$ (комутативност сабирања)
5. $(xy)z = x(yz)$ (асоцијативност множења)
6. Ако је $x \neq 0$, онда је $1x = x1 = x$ (неутрални елемент за множење)
7. $(\forall x \neq 0)(\exists x^{-1}) \quad xx^{-1} = x^{-1}x = 1$ (постојање инверзног елемента)
8. $xy = yx$ (комутативност множења)
9. $x(y+z) = xy+xz$ (дистрибутивност множења према сабирању)

Структура $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ је поље.

Нека су $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Свака линеарна једначина $ax+b=0$ има решење у скупу $\mathbb{Q}$.

Рационални бројеви

Да ли једначина $x^2 = 2$ има решење у скупу рационалних бројева?
Предпоставимо да је $x = \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ и да је $NZD(p, q) = 1$. Тада је
$\frac{p^2}{q^2} = 2$
$p^2 = 2q^2$
$p = 2p_1$
$4p_1^2 = 2q^2$
$2p_1^2 = q^2$
$q = 2q_1$
p и q су парни бројеви, што је контрадикција. $\sqrt{2}$ није рационалан број.

Реални бројеви

Реални бројеви су јединствени скуп бројева који задовољава следеће аксиоме

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$
2. $0+x = x+0 = x$
3. $(\forall x)(\exists -x) \quad x+(-x) = (-x)+x = 0$
4. $x+y = y+x$
5. $(xy)z = x(yz)$
6. $x \neq 0 \Rightarrow 1x = x1 = x$
7. $(\forall x \neq 0)(\exists x^{-1})\ xx^{-1} = x^{-1}x = 1$
8. $xy = yx$
9. $x(y+z) = xy+xz$
10. $x \leq x$
11. $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
12. $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
13. $x \leq y \vee y \leq x$
14. $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$
15. $0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$
16. аксиома супремума

Структура $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ је уређено поље. Приметимо да рационални бројеви задовољавају све аксиоме $1-15$.

Аксиома супремума

Аксиома супремума

Сваки скуп $A \subset \mathbb{R}$, који је непазан и ограничен одозго има супремум.

Број M је горња граница скупа A ако је за свако $a \in A$, $a \leq M$.
Посматрајмо скуп $A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$.
Која је горња граница скупа A? $M = \frac{3}{2}$.
Која је "идеална" горња граница скупа A?
То је број α такав да за свако $M < \alpha$, M **није** горња граница скупа A,тј. постоји $a \in A$ такво да је $M < a < \alpha$.Број α се назива супремум скупа A и пише $\alpha = \sup A$.

Комплексни бројеви

Посматрајмо скуп $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Сабирање се у $\mathbb{C}$ уводи као $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
Множење се у $\mathbb{C}$ уводи као $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Теорема 3

Скуп $\mathbb{C}$ са операцијама сабирања и множења чини поље.

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $0 + x = x + 0 = x$
3. $(\forall x)(\exists - x) \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$
4. $x + y = y + x$
5. $(xy)z = x(yz)$
6. $x \neq 0 \Rightarrow 1x = x1 = x$
7. $(\forall x \neq 0)(\exists x^{-1})\ xx^{-1} = x^{-1}x = 1$
8. $xy = yx$
9. $x(y + z) = xy + xz$

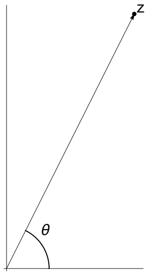
Приметимо да за парове облика $(a, 0)$ важи
$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ и
$(a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$.
Пресликавање $a \to (a, 0)$ нам омогућава да реалне бројеве третирамо као подскуп комплексних бројева.
Нека je $i = (0, 1)$ $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.
$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib$ - алгебарски запис комплексног броја
$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$.
$a = \Re(a + ib)$ - реални део комплексног броја.
$b = \Im(a + ib)$ - имагинарни део комплексног броја.
$\overline{a + ib} = a - ib$ - коњуговано комплексан број.
$z = a + ib \quad \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}$.

Тригонометријски облик комплексног броја

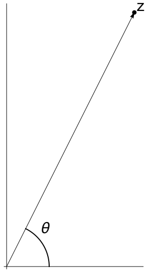
Нека je $z = a + ib$.

Модуо (апсоутна вредност) комплексног броја z je $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Аргумент комплексног броја z je аргz угао који заклапа дуж Oz са позитивним делом x осе.



Тригонометријски облик комплексног броја



Нека je $z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Тада je

$$a = \rho\cos\theta, \quad b = \rho\sin\theta.$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & a > 0; \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi, & a < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0, b > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & a = 0, b < 0; \\ ?, & a = b = 0. \end{cases}$$

Ако дефинишемо $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, онда добијамо Ојлерв облик комплексног броја $z = \rho e^{i\theta}$.

Муаврова формула

Нека je $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned}$$

Слично се показује и $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$.

Муаврова формула

За свако $n \in \mathbb{N}$ je $z_1^n = \rho_1^n(\cos n\theta_1 + i\sin n\theta_1)$.

Доказ - индукција по n.

$n-$ ти корен комплекног броја

Решавамо једначину $z = w^n$ (по w).
Нека су $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ и $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ представљени у тригонометријском облику.
$r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$.
$r = \rho^n$
$n\psi = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\rho = \sqrt[n]{r}$
$\psi = \frac{\psi+2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}$
$\psi = \frac{\psi+2k\pi}{n},\ k = 0, 1, \dots n-1$
$\psi_0 = \frac{\psi}{n},$
$\psi_1 = \frac{\psi+2\pi}{n},$
$\psi_2 = \frac{\psi+4\pi}{n},$
$\dots$
$\psi_{n-1} = \frac{\psi+2(n-1)\pi}{n},$
Решења једначине $\sqrt[n]{z}$ прдстављају темена правилног $n-$ тоугла.

Полрне координате

Поларни координатни систем у равни $\mathbb{E}^2$ се задаје избором једне тачке O, која се назива пол координаног система и полуправе $[Ox)$ која се назива оса.
Тачка M је јединствено одређена координатама $\rho = d(O, M)$ и θ који представља оријентисани угао између осе Ox и праве OM [Нацртајте слику].
Пол O је јединствено одређен условом $\rho = 0$, док угао θ није дефинисан.
Ако су дате две тачке $M(\rho_0, \theta_0)$ и $N(\rho_0, \theta_0 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ онда се M и N поклапају.
Који скуп тачака у равни је задат једначином $\rho = const$?
Који скуп тачака у равни је задат једначином $\theta = const$?

Веза поларних и Декартових координата

Изаберимо правоугли Декартов координатни систем тако да се кординатни почетак поклапа са полом поларног координатног система, оса Ox_1 се поклапа са поларном осом и оса Ox_2 је нормална на Ox_1 [нацртајте слику]онда је веза поларних и декартових координата

$$x_1 = \rho \cos \theta, \qquad x_2 = \rho \sin \theta.$$

Промена кооривната у обратном смеру је

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

За поларни угао θ важи (ако је $x_1 \neq 0$).

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x_2}{x_1}.$$

Колики је поларни угао θ ако је $x_1 = 0$?

Конусни пресеци

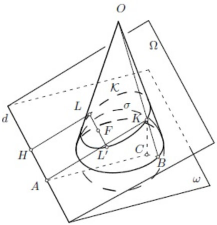
Нека су дате праве l и s које секу у тачки O. Ротацијом праве l око праве s добија се (прав кружни) конус.
Права s назива се оса конуса, а права l назива се изводница. Тачка O је врх конуса.
Конусни пресек је пресек конуса $\mathcal{K}$ и равни Ω. Шта се може бити конусни пресек зависно од положаја равни?
Ако је $O \in \Omega$ онда тај случај зовемо дегенерисан и конусни пресек може бити само једна тачка (тачка O), једна права (изводница) или две праве (две изводнице)[нацртајте слику].
Ако је $O \notin \Omega$ и $\Omega \perp s$ онда је конусни пресек круг.[нацртајте слику]
Ако је $O \notin \Omega$ и $\Omega \not\perp s$ онда се конусни пресек назива коника и за њих важи следећа теорема:

Теорема 4

Нека је дат конус $\mathcal{K}$ чији је врх тачка O и раван Ω таква да је $O \notin \Omega$ и $\Omega \not\perp s$, где је s оса конуса. Тада постоје тачка F и права d такви да за сваку тачку $K \in \mathcal{K}$ важи

$$\frac{d(F,K)}{d(K,d)} = const.$$

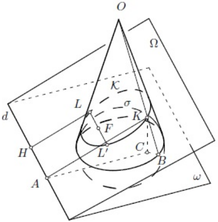
Конусни пресеци



O је врх конуса, Ω је раван у којој лежи конусни пресек,σ је сфера која додирује конус и раван Ω, ω је раван у којој лежи круг додира сфере σ и конуса, F је додирна тачка сфере σ и равни Ω, $d = \Omega \cap \omega$, K је произвољна тачка конусног пресека, A је подножје нормале из K на d, $\{B\} = OK \cap \omega$, C је подножје нормале из K на ω.

Сфера σ не мора бити јединствена, увек постоје једнали или две такве сфере, па самим тим и једна или две могућности избора за тачку F и праву d.

Услов је кључан за егзистенцију праве d, јер је $\omega \perp s$ па не може бити $\Omega \parallel \omega$.



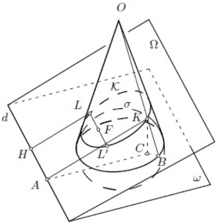
Посматрајте правоугле троуглове $\triangle KAC$ и $\triangle KBC$. Заједничка катета KC се изражава као

$$KC = KA \sin \angle KAC$$
$$KC = KB \cos \angle BKC$$

Ако поделимо ове две релације добијамо да је

$$\frac{KB}{KA} = \frac{\cos \angle BKC}{\sin \angle KAC}.$$

Приметимо да угао $\angle KAC$ представља угао између равни Ω и ω и не зависи од тачке K. Слично угао $\angle BKC$ је једнак углу између осе конуса и једне његове изводнице KB што је такође константа и не зависи од K.

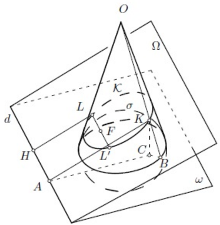


Тиме је десна сттрана једнакости константа. На левој страни приметите да су KB и KF тангентне дужи на сферу σ па морају бити једнаке дужине. Са друге стране дужина дужи KA представља растојање тачке K од праве d и добијамо

$$\frac{KF}{d(K,d)} = const.$$

Константу која је добијена у претходној теореми зовемо ексцентрицитет конике и обележавамо са e. Тачку F зовемо жижа, а праву d директриса конике.

Поларна једначина конусних пресека



У равни Ω уводимо поларни координатни систем чији је пол тачка F, а поларна оса полуправа са почетком у F која је нормална на директрису d и сече је у тачки Q. Нека је P подножје нормале из K на поларну осу.[Нацртајте слику]
Тада је из правоуглог троугла $\triangle FKP$

$$FP = FK\cos\theta = \rho\cos\theta.$$

Из претходне теореме је $FK = \rho = eKA = ePQ$.
Тада имамо $\rho = FK = eKA = e(FQ - FP) = eFQ - e\rho\cos\theta$. Ако константу eFQ обележимо са l добијамо поларну једначину конусних пресека у облику

$$\rho(1 + e\cos\theta) = l.$$

Канонска једначина конусних пресека

Уводимо правоугли Декартов координатни систем коме је оординатни почетак тачка F, а x_1 оса се поклапа са поларном осом. Веза Декартових и поларних координата је

$$x_1 = \rho\cos\theta, \qquad x_2 = \rho\sin\theta.$$

Поларна једчина конусног пресека је

$$\rho = l - \rho e\cos\theta.$$

Квадрирањем и преласком на декартове координате добија се

$$x_1^2 + x_2^2 = (l - ex_1)^2;$$

$$(1-e^2)x_1^2 + 2elx_1 + x_2^2 = l^2.$$

Дискусију настављмо по параметру e (ексцентрицитет конике)

Први случај $1 - e^2 \neq 0$

Ако је $1 - e^2 \neq 0$ претходну једначину трансформишемо у

$$x_1^2 + \frac{2el}{1-e^2}x_1 + \frac{x_2^2}{1-e^2} = \frac{l^2}{1-e^2},$$

$$\left(x_1 + \frac{el}{1-e^2}\right)^2 + \frac{x_2^2}{1-e^2} = \frac{l^2}{1-e^2} + \frac{e^2 l^2}{(1-e^2)^2} = \frac{l^2}{(1-e^2)^2},$$

Транслирамо координатни систем по формулама

$$x_1' = x_1 + \frac{el}{1-e^2} \qquad x_2' = x_2.$$

$$\frac{x_1^2}{\frac{l^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{x_2^2}{\frac{l^2}{(1-e^2)}} = 1,$$

Ако уведемо ознаке $a^2 = \frac{l^2}{(1-e^2)^2}$ и $b^2 = \frac{l^2}{|1-e^2|}$ добијамо једначину у облику

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{\operatorname{sgn}(1-e^2)b^2} = 1.$$

Елипса

Ако је $0 < e < 1$ добијамо канонску једначину елипсе:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Величине a и b називамо велика односно мала полуоса елипсе.[нацртајте слику]
Приметимо да је $a > b$. Елипса има две жиже $F_{1,2}(\pm ea, 0)$ на x_1-оси. Величина ea се обележава са c и представља растојање жижа од координатног почетка (центра елипсе).

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Ако је $b > a$ такође имамо елипсу, али не у канонском облику. Таква елипса има жизе ха x_2 оси (Заротирана за $90\,\mathrm{deg}$).

Хипербола

Ако je $e > 1$ добијамо канонску једначину хиперболе:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Величине a и b називамо реална односно имагинарна полуоса елипсе.[нацртајте слику]
Елипса има две жиже $F_{1,2}(\pm ea, 0)$ на x_1-оси. Величина ea се обележава са c и представља растојање жижа од координатног почетка (центра хиперболе).

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Једначина

$$-\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

представља хиперболу чије су жиже на x_2 оси. Асимптоте хиперболе су праве $x_2 = \pm\frac{b}{a}x_1$. Хипербола и њена асимптота

Други случај $1 - e^2 = 0$

Ако је $e = 1$ добијамо

$$x_2^2 = l^2 - 2lx_1.$$

Уводимо нове координате

$$x_1' = \frac{l}{2} - x_1, \qquad x_2' = x_2.$$

Која геометријска трансформација је задата овим формулама?

$$x_2^2 = 2lx_1.$$

Парабола има тачно једну жижу.

Тангента

Под којим условом права $t: x_2 = kx_1 + n$ представља тангенту на елипсу? Нека је елипса дата у канонском облику

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

права t је њена тангента ако има тачо један пресек, дакле ако решимо систем треба да добијемо тачно једно решење

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(kx_1 + n)^2}{b^2} = 1,$$

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)x_1^2 + \frac{2kn}{b^2}x_1 + \left(\frac{n^2}{b^2} - 1\right) = 0.$$

Дискриминанта је $D = \frac{4k^2n^2}{b^4} - 4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)\left(\frac{n^2}{b^2} - 1\right) = 0$.
Сређивањем претходног израза добијамо услов додира у облику $a^2k^2 + b^2 = n^2$[распишите међукораке].

Тангента

Истим поступком као за елипсу добијамо услов додира хиперболе $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$, и праве $t: \; x_2 = kx_1 + n$:

$$a^2 k^2 - b^2 = n^2.$$

У случају параболе $x_2^2 = 2lx_1$ услов додира је $l = 2kn$.
Ако тачка $M(m_1, m_2)$ припада коници онда постоји тачно једна тангента која додирује конику у M. Њена једначина је

елипса	$\frac{m_1 x_1}{a^2} + \frac{m_2 x_2}{b^2} = 1$
хипербола	$\frac{m_1 x_1}{a^2} - \frac{m_2 x_2}{b^2} = 1$
парабола	$m_2 x_2 = l(x_1 + m_1)$

Фокусна особина елипсе и хиперболе

Теорема 5

Нека је M произвољна тачка елипсе $\mathcal{E}$ и нека су жиже F_1, F_2. Тада је $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Нека су директрисе елипсе праве d_1 и d_2, и p права нормална на директрисе која сдржи тачку M. Нека је $A_i = d_i \cap p$, $i = 1, 2$.[нацртајте слику]
Тада знамо да је

$$MF_1 + MF_2 = eMA_1 + eMA_2 = eA_1A_2 = const.$$

Да би одредили константу поставите координатни систем тако да елипса буде у канонском облику, а за тачку M изаберите једну од тачака у пресеку x_1 осе и елипсе.

Фокусна особина елипсе и хиперболе

Теорема 6

Нека је M произвољна тачка хиперболе $\mathcal{E}$ и нека су жиже F_1,F_2. Тада је $|MF_1 - MF_2| = 2a$.

Доказ је сличан претходном.

Фокусне особине коника

Теорема 7

Светлосни зрак који извире из жиже елипсе и одбија се од елипсе, пролази кроз другу жижу елипсе.

Теорема 8

Светлосни зрак који извире из жиже хиперболе и одбија се од хиперболе, (као да) пролази кроз другу жижу хиперболе.

Теорема 9

Светлосни зрак који извире из жиже параболе и одбија се од параболе, паралелан је оси параболе.

Случај праболе има велику примену у производњи телескопа, рефлектора, фарова, антена ...

Оптичке особине коника

Зрак се одбија од конике тако да угао између упадног зрака и тангенте у додирној тачки једнак углу између одбојног зрака и тангенте у додирној тачки.

Посматрајмо случај елипсе. Нека је M произвољна тачка елипсе, t тангента на елипсу у тачки M и F_1, F_2 жиже елипсе. Да би доказали теорему 7 трба показати да је $\angle(F_1M, t) = \angle(t, F_2M)$.

Нека су A_1 и A_2 редом подножја нормале из F_1 и F_2 на t. [нацртате слику]

Треба показати да су $\triangle MF_1A_1$ и $\triangle MF_2A_2$ слични. Уводимо Декартов правоугли координатни систем тако да елипса буде у канонском облику.

Тачка $M(m_1, m_2)$, $F_{1,2}(\pm c, 0)$ и $t : \frac{m_1 x_1}{a^2} + \frac{m_2 x_2}{b^2} = 1$. Дужине дужи F_1A_1 и F_2A_2 се могу добити као растојање жижа од праве t. Проверите да важи следћа једнакост

$$\frac{MF_1}{F_1A_1} = \frac{MF_2}{F_2A_2}.$$

Векторски простор

Дефиниција 4

Скуп V на коме је дефинсана операција $+ : V \times V \to V$ и $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ је (реалан) векторски простор ако за свако $u, v \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи

1. (В,ђ) је комутативна група,
2. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$,
3. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$,
4. $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$,
5. $1u = u$.

Дефиниција 5

Вектори $v_1, v_2, \ldots v_k$ су линеарно независни ако је линеарна комбинација $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n$ једнака нула вектору ако и сам ако је $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Вектори $v_1, v_2, \ldots v_k$ су линеарно зависни ако нису линеарно независни.

Дефиниција 6

Скуп вектора $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ је база векторског простора V ако је испуњено

1. $e_1, e_2, \ldots e_n$ су линеарно независни,
2. сваки вектор $v \in V$ се мозехе записати као линеарна комбинација базних вектора, тј. $v = \alpha_1 e_1 + \ldots \alpha_n e_n$.

Теорема 10

Ако је $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ база векторског простора V онда се сваки вектор $v \in V$ се мозехе записати као линеарна комбинација базних вектора на јединствен начин.

Дефиниција 7

Број елемената базе се називва димензија векторског простора.

Теорема 11

Димензија простора $\mathbb{R}^n$ је n.

Дефиниција 8

Канонска база у $\mathbb{R}^2$ је задата векторима $i = (1, 0)$ и $j = (0, 1)$.
Канонска база у $\mathbb{R}^3$ је задата векторима $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ и $k = (0, 0, 1)$.