Klinijeva terema o normalnoj formi

N. Ikodinović

ikodinovic@matf.bg.ac.rs

March 25, 2018

Pregled predavanja

1. Kodiranje programa
2. Kodiranje konfiguracija i funkcija $\mathrm{next} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
3. Kodiranje izračunavanja i Klinijev predikat

Pregled predavanja

1. Kodiranje programa

2. Kodiranje konfiguracija i funkcija $\mathrm{next} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

3. Kodiranje izračunavanja i Klinijev predikat

Kodiranje RM-instrukcija

$$\langle x_1, x_2 \rangle = 2^{x_1}(2x_2+1)-1; \quad \langle n \rangle_1 = (n+1)_0, \ \langle n \rangle_2 = \left\lfloor \frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)_0}}-1}{2} \right\rfloor$$

Kodiranje RM-instrukcija

$\langle x_1, x_2\rangle = 2^{x_1}(2x_2+1)-1; \quad \langle n\rangle_1 = (n+1)_0,\ \langle n\rangle_2 = \left[\frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)_0}}-1}{2}\right]$

$[R_k^+ \mid \ell] = \langle 2(k-1), \ell\rangle,\ k \geqslant 1, \ell \geqslant 0$
$[R_k^- \mid \ell_1, \ell_2] = \langle 2(k-1)+1, \langle \ell_1, \ell_2\rangle\rangle,\ k \geqslant 1, \ell_1, \ell_2 \geqslant 0$

Kodiranje RM-instrukcija

$$\langle x_1, x_2 \rangle = 2^{x_1}(2x_2+1)-1; \quad \langle n \rangle_1 = (n+1)_0,\ \langle n \rangle_2 = \left[\frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)_0}} - 1}{2} \right]$$

$[R_k^+ \mid \ell] = \langle 2(k-1), \ell \rangle,\ k \geqslant 1, \ell \geqslant 0$
$[R_k^- \mid \ell_1, \ell_2] = \langle 2(k-1)+1, \langle \ell_1, \ell_2 \rangle \rangle,\ k \geqslant 1, \ell_1, \ell_2 \geqslant 0$

Primer

$[R_1^+ \mid 2] = \langle 2(1-1), 2 \rangle = \langle 0, 2 \rangle = 2^0 \cdot (2 \cdot 2 + 1) - 1 = 4$

$[R_2^- \mid 2, 3] = \langle 2(2-1)+1, \langle 2, 3 \rangle \rangle = \cdots = 439$

Kodiranje RM-instrukcija

$\langle x_1, x_2 \rangle = 2^{x_1}(2x_2+1)-1; \quad \langle n \rangle_1 = (n+1)_0,\ \langle n \rangle_2 = \left[\frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)_0}} - 1}{2} \right]$

$[R_k^+ \mid \ell] = \langle 2(k-1), \ell \rangle,\ k \geqslant 1, \ell \geqslant 0$
$[R_k^- \mid \ell_1, \ell_2] = \langle 2(k-1)+1, \langle \ell_1, \ell_2 \rangle \rangle,\ k \geqslant 1, \ell_1, \ell_2 \geqslant 0$

PRIMER

$[R_1^+ \mid 2] = \langle 2(1-1), 2 \rangle = \langle 0, 2 \rangle = 2^0 \cdot (2 \cdot 2 + 1) - 1 = 4$

$[R_2^- \mid 2, 3] = \langle 2(2-1)+1, \langle 2, 3 \rangle \rangle = \cdots = 439$

$[?] = 12$:

Kodiranje RM-instrukcija

$$\langle x_1, x_2\rangle = 2^{x_1}(2x_2+1)-1; \quad \langle n\rangle_1 = (n+1)_0,\ \langle n\rangle_2 = \left[\frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)_0}}-1}{2}\right]$$

$[R_k^+ \mid \ell] = \langle 2(k-1), \ell\rangle,\ k \geqslant 1, \ell \geqslant 0$
$[R_k^- \mid \ell_1, \ell_2] = \langle 2(k-1)+1, \langle \ell_1, \ell_2\rangle\rangle,\ k \geqslant 1, \ell_1, \ell_2 \geqslant 0$

Primer

$[R_1^+ \mid 2] = \langle 2(1-1), 2\rangle = \langle 0, 2\rangle = 2^0 \cdot (2\cdot 2+1)-1 = 4$

$[R_2^- \mid 2, 3] = \langle 2(2-1)+1, \langle 2, 3\rangle\rangle = \cdots = 439$

$[?] = 12$: $\quad 12 = \langle 0, 6\rangle = \langle 2\cdot(1-1), 6\rangle = [R_1^+ \mid 6]$

Kodiranje RM-instrukcija

$\langle x_1, x_2\rangle = 2^{x_1}(2x_2+1)-1;\quad \langle n\rangle_1 = (n+1)_0,\ \langle n\rangle_2 = \left[\frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)_0}}-1}{2}\right]$

$[R_k^+ \mid \ell] = \langle 2(k-1), \ell\rangle,\ k \geqslant 1, \ell \geqslant 0$
$[R_k^- \mid \ell_1, \ell_2] = \langle 2(k-1)+1, \langle \ell_1, \ell_2\rangle\rangle,\ k \geqslant 1, \ell_1, \ell_2 \geqslant 0$

PRIMER

$[R_1^+ \mid 2] = \langle 2(1-1), 2\rangle = \langle 0, 2\rangle = 2^0 \cdot (2\cdot 2+1)-1 = 4$

$[R_2^- \mid 2, 3] = \langle 2(2-1)+1, \langle 2, 3\rangle\rangle = \cdots = 439$

$[?] = 12:\quad 12 = \langle 0, 6\rangle = \langle 2\cdot(1-1), 6\rangle = [R_1^+ \mid 6]$

$[?] = 17:$

Kodiranje RM-instrukcija

$$\langle x_1, x_2\rangle = 2^{x_1}(2x_2+1)-1; \quad \langle n\rangle_1 = (n+1)_0,\ \langle n\rangle_2 = \left[\frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)_0}}-1}{2}\right]$$

$[R_k^+ \mid \ell] = \langle 2(k-1), \ell\rangle,\ k \geqslant 1, \ell \geqslant 0$
$[R_k^- \mid \ell_1, \ell_2] = \langle 2(k-1)+1, \langle \ell_1, \ell_2\rangle\rangle,\ k \geqslant 1, \ell_1, \ell_2 \geqslant 0$

Primer

$[R_1^+ \mid 2] = \langle 2(1-1), 2\rangle = \langle 0, 2\rangle = 2^0 \cdot (2\cdot 2+1) - 1 = 4$

$[R_2^- \mid 2, 3] = \langle 2(2-1)+1, \langle 2, 3\rangle\rangle = \cdots = 439$

$[?] = 12: \quad 12 = \langle 0, 6\rangle = \langle 2\cdot(1-1), 6\rangle = [R_1^+ \mid 6]$

$[?] = 17: \quad 17 = \langle 1, 4\rangle = \langle 2\cdot(1-1)+1, \langle 0, 2\rangle\rangle = [R_1^- \mid 0, 2]$

Kodiranje RM-instrukcija

$$\langle x_1, x_2\rangle = 2^{x_1}(2x_2+1)-1; \quad \langle n\rangle_1 = (n+1)_0,\ \langle n\rangle_2 = \left[\frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)_0}}-1}{2}\right]$$

$$[R_k^+ \mid \ell] = \langle 2(k-1), \ell\rangle,\ k \geqslant 1, \ell \geqslant 0$$

$$[R_k^- \mid \ell_1, \ell_2] = \langle 2(k-1)+1, \langle \ell_1, \ell_2\rangle\rangle,\ k \geqslant 1, \ell_1, \ell_2 \geqslant 0$$

PRIMER

$$[R_1^+ \mid 2] = \langle 2(1-1), 2\rangle = \langle 0, 2\rangle = 2^0 \cdot (2\cdot 2+1)-1 = 4$$

$$[R_2^- \mid 2, 3] = \langle 2(2-1)+1, \langle 2, 3\rangle\rangle = \cdots = 439$$

$$[?] = 12: \quad 12 = \langle 0, 6\rangle = \langle 2\cdot(1-1), 6\rangle = [R_1^+ \mid 6]$$

$$[?] = 17: \quad 17 = \langle 1, 4\rangle = \langle 2\cdot(1-1)+1, \langle 0, 2\rangle\rangle = [R_1^- \mid 0, 2]$$

$$[n]^{-1} = \begin{cases} R^+_{\left[\frac{\langle n\rangle_1}{2}\right]+1} \mid \langle n\rangle_2, & \text{ako } 2 \mid \langle n\rangle_1, \\ R^-_{\left[\frac{\langle n\rangle_1}{2}\right]+1} \mid \langle\langle n\rangle_2\rangle_1, \langle\langle n\rangle_2\rangle_2, & \text{ako } 2 \nmid \langle n\rangle_1. \end{cases}$$

Kodiranje RM-programa

Programu $\mathbb{P} = I_1, I_2, \ldots, I_m$ dodeljujemo kôd

$$[\![\mathbb{P}]\!] = \lceil [I_1], [I_2] \ldots, [I_m] \rceil = 2^{[I_1]} + 2^{[I_1]+[I_2]+1} + \cdots + 2^{[I_1]+\cdots+[I_m]+m-1}.$$

Kodiranje RM-programa

Programu $\mathbb{P} = I_1, I_2, \ldots, I_m$ dodeljujemo kôd

$$[\![\mathbb{P}]\!] = \lceil [I_1], [I_2] \ldots, [I_m] \rceil = 2^{[I_1]} + 2^{[I_1]+[I_2]+1} + \cdots + 2^{[I_1]+\cdots+[I_m]+m-1}.$$

Primer

$$\mathbb{P}_1 : \begin{cases} 1. \quad R_2^- \mid 2, 0 \\ 2. \quad R_1^+ \mid 1 \end{cases}$$

Kodiranje RM-programa

Programu $\mathbb{P} = I_1, I_2, \ldots, I_m$ dodeljujemo kôd

$$[\![\mathbb{P}]\!] = \lceil [I_1], [I_2] \ldots, [I_m] \rceil = 2^{[I_1]} + 2^{[I_1]+[I_2]+1} + \cdots + 2^{[I_1]+\cdots+[I_m]+m-1}.$$

Primer

$$\mathbb{P}_1 : \begin{cases} 1. \quad R_2^- \mid 2, 0 \\ 2. \quad R_1^+ \mid 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [\![\mathbb{P}_1]\!] &= \lceil [R_2^- \mid 2, 0], [R_1^+ \mid 1] \rceil \\ &= \lceil 55, 2 \rceil = 2^{55} + 2^{55+2+1} = 324\,259\,173\,170\,675\,712 \end{aligned}$$

Kodiranje RM-programa

Programu $\mathbb{P} = I_1, I_2, \ldots, I_m$ dodeljujemo kôd

$$[\![\mathbb{P}]\!] = \lceil [I_1], [I_2] \ldots, [I_m] \rceil = 2^{[I_1]} + 2^{[I_1]+[I_2]+1} + \cdots + 2^{[I_1]+\cdots+[I_m]+m-1}.$$

PRIMER

$$\mathbb{P}_1 : \begin{cases} 1. & R_2^- \mid 2,0 \\ 2. & R_1^+ \mid 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} [\![\mathbb{P}_1]\!] &= \lceil [R_2^- \mid 2,0], [R_1^+ \mid 1] \rceil \\ &= \lceil 55, 2 \rceil = 2^{55} + 2^{55+2+1} = 324\,259\,173\,170\,675\,712 \end{aligned}$$

$\mathbb{P}_2 :\ 1. R_1^- \mid 0,1$

$$[\![\mathbb{P}_2]\!] = \lceil [R_1^- \mid 0,1] \rceil = \lceil 9 \rceil = 2^9 = 512$$

Dekodiranje

$\textsc{Primer}\ [\![?]\!] = 178$

Dekodiranje

$\textsc{Primer}$ $[\![?]\!] = 178$

$178 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^1 = (10110010)_{\mathrm{bin}} = \lceil 1, 2, 0, 1 \rceil$

Dekodiranje

$\text{Primer } [\![?]\!] = 178$

$178 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^1 = (10110010)_{\text{bin}} = \lceil 1, 2, 0, 1 \rceil$

$[1]^{-1} = R_1^- \mid 0, 0,$

Dekodiranje

$\textsc{Primer}$ $[\![?]\!] = 178$

$178 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^1 = (10110010)_{\text{bin}} = \lceil 1, 2, 0, 1 \rceil$

$[1]^{-1} = R_1^- \mid 0, 0, \quad [2]^{-1} = R_1^+ \mid 1,$

Dekodiranje

$\textsc{Primer}$ $[\![?]\!] = 178$

$178 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^1 = (10110010)_{\mathrm{bin}} = \lceil 1, 2, 0, 1 \rceil$

$[1]^{-1} = R_1^- \mid 0, 0, \quad [2]^{-1} = R_1^+ \mid 1, \quad [0]^{-1} = R_1^+ \mid 0$

Dekodiranje

$\textsc{Primer}\ [\![?]\!] = 178$

$178 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^1 = (10110010)_{\mathrm{bin}} = \lceil 1, 2, 0, 1 \rceil$

$[1]^{-1} = R_1^- \mid 0, 0, \quad [2]^{-1} = R_1^+ \mid 1, \quad [0]^{-1} = R_1^+ \mid 0$

$$\mathbb{P} = \begin{cases} 1. & R_1^- \mid 0, 0 \\ 2. & R_1^+ \mid 1 \\ 3. & R_1^+ \mid 0 \\ 4. & R_1^- \mid 0, 0 \end{cases}$$

$[\![\mathbb{P}]\!] = 178$

Nabrajanje *k*-arnih parcijalno rekurzivnih funkcija

Za $e \in \mathbb{N}$ i $k \geqslant 1$, neka je $\varphi_e^{(k)}$ k-arna parcijalna funkcija koju izračunava program čiji je kôd e:

$$\varphi_e^{(k)}(\vec{x}) \simeq \varphi_{[\![e]\!]^{-1}}^{(k)}(\vec{x}),\ \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Nabrajanje k-arnih parcijalno rekurzivnih funkcija

Za $e \in \mathbb{N}$ i $k \geqslant 1$, neka je $\varphi_e^{(k)}$ k-arna parcijalna funkcija koju izračunava program čiji je kôd e:

$$\varphi_e^{(k)}(\vec{x}) \simeq \varphi_{[\![e]\!]^{-1}}^{(k)}(\vec{x}),\ \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

PRIMER. Broj 16 je kôd programa koji ima samo jednu instrukciju: $1.\, R_1^+ \mid 2$, pa je $\varphi_{16}^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) = x_1 + 1$.

Nabrajanje k-arnih parcijalno rekurzivnih funkcija

Za $e \in \mathbb{N}$ i $k \geqslant 1$, neka je $\varphi_e^{(k)}$ k-arna parcijalna funkcija koju izračunava program čiji je kôd e:

$$\varphi_e^{(k)}(\vec{x}) \simeq \varphi_{[\![e]\!]^{-1}}^{(k)}(\vec{x}),\ \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Primer. Broj 16 je kôd programa koji ima samo jednu instrukciju: 1. $R_1^+ \mid 2$, pa je $\varphi_{16}^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) = x_1 + 1$.

Numeracija (nabrajanje) svih k-arnih parcijalno rekurzivnih funkcija:

$$\varphi_0^{(k)}, \varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \varphi_3^{(k)}, \varphi_4^{(k)}, \ldots$$

Nabrajanje k-arnih parcijalno rekurzivnih funkcija

Za $e \in \mathbb{N}$ i $k \geqslant 1$, neka je $\varphi_e^{(k)}$ k-arna parcijalna funkcija koju izračunava program čiji je kôd e:

$$\varphi_e^{(k)}(\vec{x}) \simeq \varphi_{[\![e]\!]^{-1}}^{(k)}(\vec{x}),\ \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

PRIMER. Broj 16 je kôd programa koji ima samo jednu instrukciju: $1.\, R_1^+ \mid 2$, pa je $\varphi_{16}^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) = x_1 + 1$.

Numeracija (nabrajanje) svih k-arnih parcijalno rekurzivnih funkcija:

$$\varphi_0^{(k)}, \varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \varphi_3^{(k)}, \varphi_4^{(k)}, \ldots$$

- Za svaku k-arnu parcijalno rekurzivnu funkciju f postoji prirodan broj e takav da je $f = \varphi_e^{(k)}$; broj e se naziva indeks funkcije f (pri odgovarajućoj numeraciji).
- Svaka parcijalno rekurzivna funkcija ima beskonačno mnogo indeksa.

Pregled predavanja

1 Kodiranje programa

2 Kodiranje konfiguracija i funkcija $\mathrm{next}:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

3 Kodiranje izračunavanja i Klinijev predikat

Kodiranje konfiguracija i funkcija $\mathrm{next} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

C: $\boxed{i}$ $\quad$ | r_1 | $\cdots$ | r_d | $0 \cdots$ |

$$[C] = p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_d^{r_d}$$

Kodiranje konfiguracija i funkcija $\mathrm{next} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

C: $\boxed{i}$ $\quad$ | r_1 | $\cdots$ | r_d | $0 \cdots$ |

$[\mathrm{C}] = p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_d^{r_d}$

$$\mathrm{NEXT}(\mathbb{P}, \mathrm{C}) = \text{ konfiguracija koja se dobija iz C izvršavanjem odgovarajuće instrukcije programa } \mathbb{P}.$$

Kodiranje konfiguracija i funkcija $\mathrm{next}: \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

C: $\boxed{i}$ | r_1 | $\cdots$ | r_d | $0\cdots$

$$[\mathrm{C}] = p_0^i p_1^{r_1}\cdots p_d^{r_d}$$

$$\mathrm{NEXT}(\mathbb{P},\mathrm{C}) = \text{ konfiguracija koja se dobija iz C izvršavanjem odgovarajuće instrukcije programa } \mathbb{P}.$$

Lema

Postoji primitivno rekurzivna funkcija $\mathrm{next}: \mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$
takva da za svaki program $\mathbb{P}$ i svaku konfiguraciju C važi jednakost
$\mathrm{next}([\![\mathbb{P}]\!],[\![\mathrm{C}]\!]) = [\![\mathrm{NEXT}(\mathbb{P},\mathrm{C})]\!]$.

$\mathrm{next} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

PRIMER. Izračunati $\mathrm{next}(272, 252)$.

$\mathrm{next} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

PRIMER. Izračunati $\mathrm{next}(272, 252)$.

- 272 je kôd programa $\mathbb{P}$:

$$\begin{array}{ll} 1. & R_1^+ \mid 2 \\ 2. & R_2^+ \mid 0 \end{array}$$

next : $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

PRIMER. Izračunati $\mathrm{next}(272, 252)$.

- 272 je kôd programa $\mathbb{P}$:

  1. $R_1^+ \mid 2$
  2. $R_2^+ \mid 0$

- $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ je kôd konfiguracije C:

  $\boxed{2}$ | 2 | 0 | 1 | $0\cdots$

$\mathrm{next} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

PRIMER. Izračunati $\mathrm{next}(272, 252)$.

- 272 je kôd programa $\mathbb{P}$:

$$\begin{array}{ll} 1. & R_1^+ \mid 2 \\ 2. & R_2^+ \mid 0 \end{array}$$

- $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ je kôd konfiguracije C:
  $\boxed{2}$ $\boxed{2 \mid 0 \mid 1 \mid 0 \cdots}$
- $\mathrm{next}(272, 252) = \mathrm{next}([\![\mathbb{P}]\!], [C])$ je kôd konfiguracije
  $\boxed{0}$ $\boxed{2 \mid 1 \mid 1 \mid 0 \cdots}$

$\mathrm{next}:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

PRIMER. Izračunati $\mathrm{next}(272, 252)$.

- 272 je kôd programa $\mathbb{P}$:

$$\begin{array}{ll} 1. & R_1^+ \mid 2 \\ 2. & R_2^+ \mid 0 \end{array}$$

- $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ je kôd konfiguracije C:

$$\boxed{2} \quad \boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0\cdots}$$

- $\mathrm{next}(272, 252) = \mathrm{next}([\![\mathbb{P}]\!], [\mathrm{C}])$ je kôd konfiguracije

$$\boxed{0} \quad \boxed{2}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0\cdots}$$

Dakle, $\mathrm{next}(272, 252) = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 315$

Pregled predavanja

1. Kodiranje programa
2. Kodiranje konfiguracija i funkcija $\mathrm{next} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
3. Kodiranje izračunavanja i Klinijev predikat

Kodiranje izarčunavanja i Klinijev predikat

$\mathcal{I} = C_1, C_2, \ldots, C_n$ – niz konfiguracija
$[\![\mathcal{I}]\!] = \lceil [C_1], [C_2] \ldots, [C_n] \rceil$ – kôd niza konfiguracija

Kodiranje izarčunavanja i Klinijev predikat

$\mathcal{I} = C_1, C_2, \ldots, C_n$ – niz konfiguracija
$[\![\mathcal{I}]\!] = \lceil [C_1], [C_2] \ldots, [C_n] \rceil$ – kôd niza konfiguracija

Pitanje: Da li neki konačan niz konfiguracija $C_1, \ldots, C_n$ predstavlja izračunavanje programa $\mathbb{P}$ za ulaz $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$?

Kodiranje izarčunavanja i Klinijev predikat

$\mathcal{I} = C_1, C_2, \ldots, C_n$ – niz konfiguracija
$[\![\mathcal{I}]\!] = \lceil [C_1], [C_2] \ldots, [C_n] \rceil$ – kôd niza konfiguracija

PITANJE: Da li neki konačan niz konfiguracija $C_1, \ldots, C_n$ predstavlja izračunavanje programa $\mathbb{P}$ za ulaz $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$?

ODGOVOR: Proveriti da li je

- C_1 odgovarajuća početna konfiguracija za ulaz $\vec{x}$;

Kodiranje izračunavanja i Klinijev predikat

$\mathcal{I} = C_1, C_2, \dots, C_n$ – niz konfiguracija
$[\![\mathcal{I}]\!] = \lceil [C_1], [C_2] \dots, [C_n] \rceil$ – kôd niza konfiguracija

PITANJE: Da li neki konačan niz konfiguracija $C_1, \dots, C_n$ predstavlja izračunavanje programa $\mathbb{P}$ za ulaz $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$?

ODGOVOR: Proveriti da li je

- C_1 odgovarajuća početna konfiguracija za ulaz $\vec{x}$;
- $\mathrm{NEXT}(\mathbb{P}, C_i) = C_{i+1}$, $1 \leqslant i < n$;

Kodiranje izarčunavanja i Klinijev predikat

$\mathcal{I} = \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n$ – niz konfiguracija
$[\![\mathcal{I}]\!] = \lceil [\mathrm{C}_1], [\mathrm{C}_2] \ldots, [\mathrm{C}_n] \rceil$ – kôd niza konfiguracija

PITANJE: Da li neki konačan niz konfiguracija $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_n$ predstavlja izračunavanje programa $\mathbb{P}$ za ulaz $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$?

ODGOVOR: Proveriti da li je

- C_1 odgovarajuća početna konfiguracija za ulaz $\vec{x}$;
- $\mathrm{NEXT}(\mathbb{P}, \mathrm{C}_i) = \mathrm{C}_{i+1}$, $1 \leqslant i < n$;
- C_n završna konfiguracija za program $\mathbb{P}$.

Kodiranje izračunavanja i Klinijev predikat

$\mathcal{I} = C_1, C_2, \ldots, C_n$ – niz konfiguracija
$[\![\mathcal{I}]\!] = \lceil [C_1], [C_2] \ldots, [C_n] \rceil$ – kôd niza konfiguracija

PITANJE: Da li neki konačan niz konfiguracija $C_1, \ldots, C_n$ predstavlja izračunavanje programa $\mathbb{P}$ za ulaz $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$?

ODGOVOR: Proveriti da li je

- C_1 odgovarajuća početna konfiguracija za ulaz $\vec{x}$;
- $\mathrm{NEXT}(\mathbb{P}, C_i) = C_{i+1}$, $1 \leqslant i < n$;
- C_n završna konfiguracija za program $\mathbb{P}$.

KLINIJEV PREDIKAT: $T_k \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}$:

$$T_k([\![\mathbb{P}]\!], \vec{x}, [\mathcal{I}]) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{konačan niz konfiguracija } \mathcal{I} \text{ je izračunavanje programa } \mathbb{P} \text{ za ulaz } \vec{x} \in \mathbb{N}^k$$

Klinijev predikat

Za svako $k \geqslant 1$, relacija $T_k \subseteq \mathbb{N}^{k+2}$

$$T_k(e, \vec{x}, z) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} z \text{ je kôd izračunavanja programa čiji je kôd } e \text{ za ulaz } \vec{x}$$

jeste primitivno rekurzivna.

Klinijev predikat

Za svako $k \geqslant 1$, relacija $T_k \subseteq \mathbb{N}^{k+2}$

$$T_k(e, \vec{x}, z) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} z \text{ je kôd izračunavanja programa čiji je kôd } e \text{ za ulaz } \vec{x}$$

jeste primitivno rekurzivna.

Rezultat izračunavanja po RM-programu za zadati ulaz je sadržaj registra R_1 u završnoj konfiguraciji; $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} U(z) &= \text{sadržaj registra } R_1 \text{ u poslednjoj konfiguraciji} \\ &\quad\ \text{niza konfiguracija čiji je kôd } z \\ &= \left(\lfloor z \rfloor_{\mathrm{lh}(z)}\right)_1 \end{aligned}$$

Klinijeva teorema o normalnoj formi

Klinijeva teorema o normalnoj formi

Postoji primitivno rekurzivna funkcija $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i za svako $k \geqslant 1$ primitivno rekurzivna $(k+2)$-arna relacija T_k tako da za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi:

- $\vec{x} \in \mathrm{dom}(\varphi_e^{(k)}) \Leftrightarrow \exists z\, T_k(e, \vec{x}, z)$,
- $\varphi_e^{(k)}(\vec{x}) \simeq U(\mu z\, T_k(e, \vec{x}, z))$.

Klinijeva teorema o normalnoj formi

Klinijeva teorema o normalnoj formi

Postoji primitivno rekurzivna funkcija $U : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i za svako $k \geqslant 1$ primitivno rekurzivna $(k+2)$-arna relacija T_k tako da za svako $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi:

- $\vec{x} \in \mathrm{dom}(\varphi_e^{(k)}) \Leftrightarrow \exists z\, T_k(e, \vec{x}, z)$,
- $\varphi_e^{(k)}(\vec{x}) \simeq U(\mu z\; T_k(e, \vec{x}, z))$.

Teorema o efektivnosti numeracije

Za svako $k \geqslant 1$, parcijalna $(k+1)$-arna funkcija

$$(e, \vec{x}) \mapsto U(\mu z\; T_k(e, \vec{x}, z))$$

jeste parcijalno rekurzivna.

Univerzalna funkcija

Za svako $k \geqslant 1$, parcijalno rekurzivna $(k+1)$-arna funkcija

$$(e, \vec{x}) \mapsto U(\mu z\ T_k(e, \vec{x}, z))$$

obeležava se $\Phi_U^{(k)}$ i naziva univerzalna funkcija za k-arne parcijalno rekurzivne funkcije:

$$\Phi_U^{(k)}(e, \vec{x}) \simeq \varphi_e^{(k)}(\vec{x}), \text{ za sve } e \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

Univerzalna funkcija

Za svako $k \geqslant 1$, parcijalno rekurzivna $(k+1)$-arna funkcija

$$(e, \vec{x}) \mapsto U(\mu z\ T_k(e, \vec{x}, z))$$

obeležava se $\Phi_U^{(k)}$ i naziva univerzalna funkcija za k-arne parcijalno rekurzivne funkcije:

$$\Phi_U^{(k)}(e, \vec{x}) \simeq \varphi_e^{(k)}(\vec{x}), \text{ za sve } e \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

PRIMER. $\Phi_U^{(3)}(16, 17, 21, 72) = ?$

Univerzalna funkcija

Za svako $k \geqslant 1$, parcijalno rekurzivna $(k+1)$-arna funkcija

$$(e, \vec{x}) \mapsto U(\mu z\ T_k(e, \vec{x}, z))$$

obeležava se $\Phi_U^{(k)}$ i naziva univerzalna funkcija za k-arne parcijalno rekurzivne funkcije:

$$\Phi_U^{(k)}(e, \vec{x}) \simeq \varphi_e^{(k)}(\vec{x}),\ \text{za sve}\ e \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

PRIMER. $\Phi_U^{(3)}(16, 17, 21, 72) = ?$

Broj 16 je kôd programa: $1. R_1^+ \mid 2;$

Univerzalna funkcija

Za svako $k \geqslant 1$, parcijalno rekurzivna $(k+1)$-arna funkcija

$$(e, \vec{x}) \mapsto U(\mu z\ T_k(e, \vec{x}, z))$$

obeležava se $\Phi_U^{(k)}$ i naziva univerzalna funkcija za k-arne parcijalno rekurzivne funkcije:

$$\Phi_U^{(k)}(e, \vec{x}) \simeq \varphi_e^{(k)}(\vec{x}), \text{ za sve } e \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

PRIMER. $\Phi_U^{(3)}(16, 17, 21, 72) = ?$

Broj 16 je kôd programa: $1.R_1^+ \mid 2;$

Ovaj program za ulaz $(17, 21, 72)$ daje izlaz 18;

Univerzalna funkcija

Za svako $k \geqslant 1$, parcijalno rekurzivna $(k+1)$-arna funkcija

$$(e, \vec{x}) \mapsto U(\mu z\ T_k(e, \vec{x}, z))$$

obeležava se $\Phi_U^{(k)}$ i naziva univerzalna funkcija za k-arne parcijalno rekurzivne funkcije:

$$\Phi_U^{(k)}(e, \vec{x}) \simeq \varphi_e^{(k)}(\vec{x}), \text{ za sve } e \in \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{N}^k.$$

PRIMER. $\Phi_U^{(3)}(16, 17, 21, 72) = ?$

Broj 16 je kôd programa: $1.R_1^+ \mid 2$;

Ovaj program za ulaz $(17, 21, 72)$ daje izlaz 18;

$$\boxed{\Phi_U^{(3)}(16, 17, 21, 72) = 18}$$

Nekoliko primera

PRIMERI Sledeće funkcije su parcijalno rekurzivne:

- $x \mapsto \varphi_x(x)$

Nekoliko primera

PRIMERI Sledeće funkcije su parcijalno rekurzivne:

- $x \mapsto \varphi_x(x) \simeq \Phi_U(x, x)$

Nekoliko primera

PRIMERI Sledeće funkcije su parcijalno rekurzivne:

- $x \mapsto \varphi_x(x) \simeq \Phi_U(x, x)$
- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi_{x_1}(x_3) + \varphi_{x_2}(x_3)$

Nekoliko primera

PRIMERI Sledeće funkcije su parcijalno rekurzivne:

- $x \mapsto \varphi_x(x) \simeq \Phi_U(x, x)$
- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi_{x_1}(x_3) + \varphi_{x_2}(x_3) \simeq \Phi_U(x_1, x_3) + \Phi_U(x_2, x_3)$

Nekoliko primera

PRIMERI Sledeće funkcije su parcijalno rekurzivne:

- $x \mapsto \varphi_x(x) \simeq \Phi_U(x, x)$
- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi_{x_1}(x_3) + \varphi_{x_2}(x_3) \simeq \Phi_U(x_1, x_3) + \Phi_U(x_2, x_3)$
- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi_{x_1}(x_2) + \varphi_{x_2}(x_3)$

Nekoliko primera

PRIMERI Sledeće funkcije su parcijalno rekurzivne:

- $x \mapsto \varphi_x(x) \simeq \Phi_U(x, x)$
- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi_{x_1}(x_3) + \varphi_{x_2}(x_3) \simeq \Phi_U(x_1, x_3) + \Phi_U(x_2, x_3)$
- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi_{x_1}(x_2) + \varphi_{x_2}(x_3) \simeq \Phi_U(x_1, x_2) + \Phi_U(x_2, x_3)$

Nekoliko primera

PRIMERI Sledeće funkcije su parcijalno rekurzivne:

- $x \mapsto \varphi_x(x) \simeq \Phi_U(x, x)$
- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi_{x_1}(x_3) + \varphi_{x_2}(x_3) \simeq \Phi_U(x_1, x_3) + \Phi_U(x_2, x_3)$
- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi_{x_1}(x_2) + \varphi_{x_2}(x_3) \simeq \Phi_U(x_1, x_2) + \Phi_U(x_2, x_3)$
- $(x, y) \mapsto \varphi_{x+y}(xy) + \varphi_{xy}(x + y)$

Nekoliko primera

PRIMERI Sledeće funkcije su parcijalno rekurzivne:

- $x \mapsto \varphi_x(x) \simeq \Phi_U(x, x)$
- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi_{x_1}(x_3) + \varphi_{x_2}(x_3) \simeq \Phi_U(x_1, x_3) + \Phi_U(x_2, x_3)$
- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi_{x_1}(x_2) + \varphi_{x_2}(x_3) \simeq \Phi_U(x_1, x_2) + \Phi_U(x_2, x_3)$
- $(x, y) \mapsto \varphi_{x+y}(xy) + \varphi_{xy}(x + y) \simeq \Phi_U(x + y, xy) + \Phi_U(xy, x + y)$

Nekoliko primera

PRIMERI Sledeće funkcije su parcijalno rekurzivne:

- $x \mapsto \varphi_x(x) \simeq \Phi_U(x, x)$
- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi_{x_1}(x_3) + \varphi_{x_2}(x_3) \simeq \Phi_U(x_1, x_3) + \Phi_U(x_2, x_3)$
- $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \varphi_{x_1}(x_2) + \varphi_{x_2}(x_3) \simeq \Phi_U(x_1, x_2) + \Phi_U(x_2, x_3)$
- $(x, y) \mapsto \varphi_{x+y}(xy) + \varphi_{xy}(x+y) \simeq \Phi_U(x+y, xy) + \Phi_U(xy, x+y)$

NAPOMENA. Pozivanjem programa za neku od univerzalnih funkcija zapravo zahtevamo da se prirodan broj (zapisan u nekom registru) tretira kao kôd programa i da se taj program izvrši za ulaz koji je odredjen sadržajima nekih izabranih registara. Drugim rečima, RM-programi mogu da sadrže naredbe oblika $R_j := \Phi_U^k(R_i, R_{i_1}, \dots, R_{i_k})$, čije je značenje: izvrši program čiji je kôd zapisan u R_i uzimajući za ulaz sadržaje registara R_{i_1}, $\dots$, R_{i_k} i rezultat (u slučaju zaustavljanja) upiši u R_j.