Rekurzivne funkcije

N. Ikodinović

ikodinovic@matf.bg.ac.rs

March 25, 2018

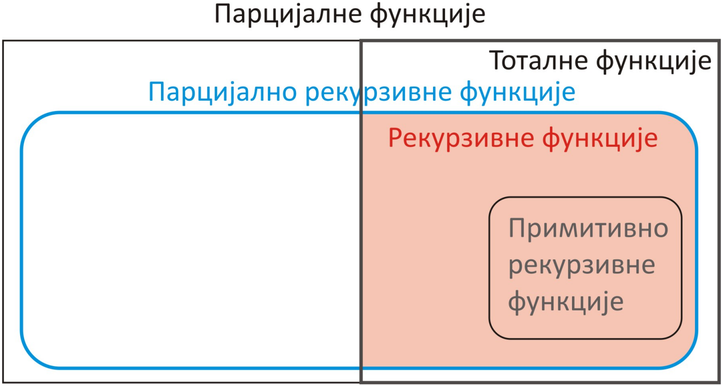
Pregled predavanja

Pregled predavanja

Rekurzivne funkcije

Definicija

Opšte rekurzivne (ili samo **rekurzivne**) funkcije jesu totalne parcijalno rekurzivne funkcije.



Akermanova funkcija

Niz unarnih primitivno rekurzivnih funkcija $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definisan je jednakostima:

$$a_0(n) = n + 1; \;\left|\; \begin{array}{l} a_{m+1}(0) = a_m(1), \\ a_{m+1}(n+1) = a_m(a_{m+1}(n)). \end{array}\right.$$

Akermanova funkcija

Niz unarnih primitivno rekurzivnih funkcija $a_0, a_1, a_2, \dots$ definisan je jednakostima:

$$a_0(n) = n+1; \left|\begin{array}{l} a_{m+1}(0) = a_m(1), \\ a_{m+1}(n+1) = a_m(a_{m+1}(n)). \end{array}\right.$$

Funkcija a_{m+1} se dobija iteracijom funkcije a_m: $a_{m+1}(n) = a_m^{(n+1)}(1)$.

Akermanova funkcija

Niz unarnih primitivno rekurzivnih funkcija $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definisan je jednakostima:

$$a_0(n) = n+1; \left| \begin{array}{l} a_{m+1}(0) = a_m(1), \\ a_{m+1}(n+1) = a_m(a_{m+1}(n)). \end{array} \right.$$

Funkcija a_{m+1} se dobija iteracijom funkcije a_m: $a_{m+1}(n) = a_m^{(n+1)}(1)$.

Akermanova funkcija jeste funkcija $(m, n) \mapsto a_m(n)$, tj. funkcija A data jednakostima:

$$\left| \begin{array}{l} A(0, n) = n+1, \\ A(m+1, 0) = A(m, 1) \\ A(m+1, n+1) = A(m, A(m+1, n)) \end{array} \right.$$

Osobine Akermanove funkcije

$$\left| \begin{array}{l} A(0,n) = n+1, \\ A(m+1,0) = A(m,1) \\ A(m+1,n+1) = A(m,A(m+1,n)) \end{array} \right.$$

1. Za svako $n \in \mathbb{N}$, $A(1,n) = n+2$, $A(2,n) = 2n+3$.

Osobine Akermanove funkcije

$$\left| \begin{array}{l} A(0,n) = n+1, \\ A(m+1,0) = A(m,1) \\ A(m+1,n+1) = A(m, A(m+1,n)) \end{array} \right.$$

1. Za svako $n \in \mathbb{N}$, $A(1,n) = n+2$, $A(2,n) = 2n+3$.
2. Za sve $m, n \in \mathbb{N}$:
   (i) $A(m,n) \geqslant n+1$
   (ii) $A(m,n) < A(m,n+1)$
   (iii) $A(m,n+1) \leqslant A(m+1,n)$
   (iv) $A(m,n) < A(m+1,n)$

Osobine Akermanove funkcije

$$\left|\begin{array}{l} A(0,n) = n+1, \\ A(m+1,0) = A(m,1) \\ A(m+1,n+1) = A(m,A(m+1,n)) \end{array}\right.$$

1. Za svako $n \in \mathbb{N}$, $A(1,n) = n+2$, $A(2,n) = 2n+3$.
2. Za sve $m, n \in \mathbb{N}$:
   (i) $A(m,n) \geqslant n+1$
   (ii) $A(m,n) < A(m,n+1)$
   (iii) $A(m,n+1) \leqslant A(m+1,n)$
   (iv) $A(m,n) < A(m+1,n)$
3. A je totalna i parcijalno rekurzivna, tj. A je rekurzivna funkcija. [Izračunati $A(3,1)$]

Osobine Akermanove funkcije

$$\begin{cases} A(0,n) = n+1, \\ A(m+1,0) = A(m,1) \\ A(m+1,n+1) = A(m, A(m+1,n)) \end{cases}$$

1. Za svako $n \in \mathbb{N}$, $A(1,n) = n+2$, $A(2,n) = 2n+3$.
2. Za sve $m, n \in \mathbb{N}$:
   (i) $A(m,n) \geqslant n+1$
   (ii) $A(m,n) < A(m,n+1)$
   (iii) $A(m,n+1) \leqslant A(m+1,n)$
   (iv) $A(m,n) < A(m+1,n)$
3. A je totalna i parcijalno rekurzivna, tj. A je rekurzivna funkcija. [Izračunati $A(3,1)$]
4. A nije primitivno rekurzivna.

Akermanova funkcija je bržo rastuća funkcija

Teorema

Za svaku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ postoji prirodan broj ℓ takav da je $f(\vec{x}) < A(\ell, \max\{x_1, \ldots, x_k\})$.

Akermanova funkcija je bržo rastuća funkcija

Teorema

Za svaku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ postoji prirodan broj ℓ takav da je $f(\vec{x}) < A(\ell, \max\{x_1, \ldots, x_k\})$.

Ideja dokaza. Funkcija $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ograničava* k-arnu funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ako za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi $f(\vec{x}) < f(\max\{x_1, \ldots, x_k\})$.

Akermanova funkcija je bržo rastuća funkcija

Teorema

Za svaku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ postoji prirodan broj ℓ takav da je $f(\vec{x}) < A(\ell, \max\{x_1, \ldots, x_k\})$.

IDEJA DOKAZA. Funkcija $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ograničava* k-arnu funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ako za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi $f(\vec{x}) < f(\max\{x_1, \ldots, x_k\})$.

- $x \mapsto A(1, x)$ ograničava osnovne funkcije.

Akermanova funkcija je bržo rastuća funkcija

Teorema

Za svaku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ postoji prirodan broj ℓ takav da je $f(\vec{x}) < A(\ell, \max\{x_1, \ldots, x_k\})$.

Ideja dokaza. Funkcija $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ograničava* k-arnu funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ako za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi $f(\vec{x}) < f(\max\{x_1, \ldots, x_k\})$.

- $x \mapsto A(1, x)$ ograničava osnovne funkcije.
- Ako $x \mapsto A(\ell_1, x)$, ..., $x \mapsto A(\ell_m, x)$, $x \mapsto A(\ell_0, x)$ redom ograničavaju $g_1, \ldots, g_m$ (dužine k) i h (dužine m), onda za $\ell = \max\{\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_m\}$, funkcija $x \mapsto A(\ell, x)$ ograničava $\mathrm{Sup}^k_m(h; g_1, \ldots, g_m)$.

Akermanova funkcija je bržo rastuća funkcija

Teorema

Za svaku primitivno rekurzivnu funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ postoji prirodan broj ℓ takav da je $f(\vec{x}) < A(\ell, \max\{x_1, \ldots, x_k\})$.

IDEJA DOKAZA. Funkcija $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ograničava* k-arnu funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ako za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi $f(\vec{x}) < f(\max\{x_1, \ldots, x_k\})$.

- $x \mapsto A(1, x)$ ograničava osnovne funkcije.
- Ako $x \mapsto A(\ell_1, x)$, ..., $x \mapsto A(\ell_m, x)$, $x \mapsto A(\ell_0, x)$ redom ograničavaju $g_1, \ldots, g_m$ (dužine k) i h (dužine m), onda za $\ell = \max\{\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_m\}$, funkcija $x \mapsto A(\ell, x)$ ograničava $\mathrm{Sup}^k_m(h; g_1, \ldots, g_m)$.
- Ako $x \mapsto A(\ell_0, x)$, $x \mapsto A(\ell_1, x)$ redom ograničavaju g (dužine k) i h (dužine $k+2$), onda za $\ell = \max\{\ell_0, \ell_1, 1\}$, funkcija $x \mapsto A(\ell, x)$ ograničava $\mathrm{Rec}^{k+1}(g, h)$.

Akermanova funkcija nije primitivno rekurzivna

Teorema

Akermanova funkcija nije primitivno rekurzivna.

DOKAZ. Ako je A primitivno rekurzivna funkcija, onda je i $A'(x) \stackrel{\text{def}}{=} A(x,x)$, $x \in \mathbb{N}$, primitivno rekurzivna.

Akermanova funkcija nije primitivno rekurzivna

Teorema

Akermanova funkcija nije primitivno rekurzivna.

DOKAZ. Ako je A primitivno rekurzivna funkcija, onda je i $A'(x) \stackrel{\text{def}}{=} A(x,x)$, $x \in \mathbb{N}$, primitivno rekurzivna.
Postoji prirodan broj $\ell \in \mathbb{N}$ takav da je:

$$A'(x) < A(\ell, x), \text{ za sve } x \in \mathbb{N}.$$

Akermanova funkcija nije primitivno rekurzivna

Teorema

Akermanova funkcija nije primitivno rekurzivna.

DOKAZ. Ako je A primitivno rekurzivna funkcija, onda je i $A'(x) \stackrel{\text{def}}{=} A(x,x)$, $x \in \mathbb{N}$, primitivno rekurzivna.
Postoji prirodan broj $\ell \in \mathbb{N}$ takav da je:

$$A'(x) < A(\ell, x), \text{ za sve } x \in \mathbb{N}.$$

Specijalno, bilo bi i $A(\ell,\ell) = A'(\ell) < A(\ell,\ell)$, što nije moguće.

μ-rekurzija

Restrikcija operatora Min^k na totalne funkcije $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju uslov:

$$\forall \vec{x} \exists y (g(\vec{x}, y) = 0),$$

naziva se μ-**rekurzija**.
Kaže se da je funkcija $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \mu y (g(\vec{x}, y) = 0)$ dobijena μ-rekurzijom funkcije g.

μ-rekurzija

Restrikcija operatora Min^k na totalne funkcije $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju uslov:

$$\forall \vec{x} \exists y (g(\vec{x}, y) = 0),$$

naziva se μ-**rekurzija**.
Kaže se da je funkcija $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \mu y (g(\vec{x}, y) = 0)$ dobijena μ-rekurzijom funkcije g.

Teorema

Skup rekurzivnih funkcija je najmanji skup funkcija koji sadrži osnovne funkcije i zatvoren je za supstituciju, primitivnu rekurziju i μ-rekurziju.

μ-rekurzija

Restrikcija operatora Min^k na totalne funkcije $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju uslov:

$$\forall\vec{x}\exists y(g(\vec{x}, y) = 0),$$

naziva se μ-**rekurzija**.
Kaže se da je funkcija $\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = \mu y(g(\vec{x}, y) = 0)$ dobijena μ-rekurzijom funkcije g.

Teorema

Skup rekurzivnih funkcija je najmanji skup funkcija koji sadrži osnovne funkcije i zatvoren je za supstituciju, primitivnu rekurziju i μ-rekurziju.

DOKAZ. Neka je $\mathcal{C}$ skup svih totalnih funkcija koje zadovoljavu navedene uslove.
Zatvorenost za μ-rekurziju znači: Ako $\mathcal{C}$ sadrži funkciju $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ za koju važi $\forall\vec{x}\exists y(g(\vec{x}, y) = 0)$, onda i funkcija $f(x) = \mu y(g(\vec{x}, y) = 0)$ pripada $\mathcal{C}$.

μ-rekurzija

Teorema

Skup rekurzivnih funkcija je najmanji skup funkcija koji sadrži osnovne funkcije i zatvoren je za supstituciju, primitivnu rekurziju i μ-rekurziju.

DOKAZ. Neka je $\mathcal{C}$ skup svih totalnih funkcija koje zadovoljavu navedene uslove.

μ-rekurzija

Teorema

Skup rekurzivnih funkcija je najmanji skup funkcija koji sadrži osnovne funkcije i zatvoren je za supstituciju, primitivnu rekurziju i μ-rekurziju.

DOKAZ. Neka je $\mathcal{C}$ skup svih totalnih funkcija koje zadovoljavu navedene uslove.

Neka je f bilo koja k-arna totalna parcijalno rekurzivna funkcija.

Postoji program $\mathbb{P}$ koji izračunava njene vrednosti: $\mathbb{P}(\vec{x})\downarrow$, za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

μ-rekurzija

Teorema

Skup rekurzivnih funkcija je najmanji skup funkcija koji sadrži osnovne funkcije i zatvoren je za supstituciju, primitivnu rekurziju i μ-rekurziju.

DOKAZ. Neka je $\mathcal{C}$ skup svih totalnih funkcija koje zadovoljavu navedene uslove.

Neka je f bilo koja k-arna totalna parcijalno rekurzivna funkcija.

Postoji program $\mathbb{P}$ koji izračunava njene vrednosti: $\mathbb{P}(\vec{x})\downarrow$, za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

$$\forall \vec{x} \exists t \, (\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}}(\vec{x}, t))_0 = 0$$

μ-rekurzija

Teorema

Skup rekurzivnih funkcija je najmanji skup funkcija koji sadrži osnovne funkcije i zatvoren je za supstituciju, primitivnu rekurziju i μ-rekurziju.

DOKAZ. Neka je $\mathcal{C}$ skup svih totalnih funkcija koje zadovoljavu navedene uslove.
Neka je f bilo koja k-arna totalna parcijalno rekurzivna funkcija.
Postoji program $\mathbb{P}$ koji izračunava njene vrednosti: $\mathbb{P}(\vec{x})\downarrow$, za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

$$\forall \vec{x} \exists t \, (\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}}(\vec{x}, t))_0 = 0$$

$\vec{x} \mapsto \mathrm{Halt}_{\mathbb{P}}(\vec{x}) = \mu t \, ((\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}}(\vec{x}, t))_0 = 0)$ pripada $\mathcal{C}$.

μ-rekurzija

Teorema

Skup rekurzivnih funkcija je najmanji skup funkcija koji sadrži osnovne funkcije i zatvoren je za supstituciju, primitivnu rekurziju i μ-rekurziju.

DOKAZ. Neka je $\mathcal{C}$ skup svih totalnih funkcija koje zadovoljavu navedene uslove.

Neka je f bilo koja k-arna totalna parcijalno rekurzivna funkcija.

Postoji program $\mathbb{P}$ koji izračunava njene vrednosti: $\mathbb{P}(\vec{x})\downarrow$, za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$.

$$\forall \vec{x} \exists t \, (\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}}(\vec{x}, t))_0 = 0$$

$\vec{x} \mapsto \mathrm{Halt}_{\mathbb{P}}(\vec{x}) = \mu t \, ((\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}}(\vec{x}, t))_0 = 0)$ pripada $\mathcal{C}$.

Iz $f(\vec{x}) = (\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}}(\vec{x}, \mathrm{Halt}_{\mathbb{P}}(\vec{x})))_1$ sledi da i f pripada $\mathcal{C}$.

Rekurzivni skupovi

Definicija

Skup $R \subseteq \mathbb{N}^k$ je **rekurzivan** ako je rekurzivna karakteristična funkcija $\chi_R : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,

$$\chi_R(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in R, \\ 0, & \vec{x} \notin R. \end{cases}$$

Rekurzivni skupovi

Definicija

Skup $R \subseteq \mathbb{N}^k$ je **rekurzivan** ako je rekurzivna karakteristična funkcija $\chi_R : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,

$$\chi_R(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in R, \\ 0, & \vec{x} \notin R. \end{cases}$$

Teorema

(1) **Komplement** rekurzivnog skupa je rekurzivan skup: ako je $R \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivan skup, onda je rekurzivan i skup $R^{\complement}$.
(2) **Unija i presek** rekurzivnih skupova (iste dužine) jesu rekurzivni skupovi: ako su $P, Q \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivni skupovi, onda su rekurzivni i skupovi $P \cap Q$ i $P \cup Q$.