Svaka RM-izračunljiva funkcija je parcijalno rekurzivna

N. Ikodinović

ikodinovic@matf.bg.ac.rs

March 19, 2018

Pregled predavanja

1. Svaka RM-izračunljiva funkcija je parcijalno rekurzivna

2. WHILE-programi

Pregled predavanja

1. Svaka RM-izračunljiva funkcija je parcijalno rekurzivna

2. WHILE-programi

$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} : \mathrm{Conf} \to \mathrm{Conf}$ i $\mathrm{next}_{\mathbb{P}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}(i; r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_d, 0 \cdots)$$

$$= \begin{cases} (\ell; r_1, \ldots, r_k + 1, \ldots, r_d, 0 \cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^+ \mid \ell, \\ (\ell_0; r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_d, 0 \cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^- \mid \ell_0, \ell_1 \text{ i } r_k = 0, \\ (\ell_1; r_1, \ldots, r_k - 1, \ldots, r_d, 0 \cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^- \mid \ell_0, \ell_1 \text{ i } r_k \neq 0, \\ (0; r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_d, 0 \cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ ne postoji.} \end{cases}$$

$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} : \mathrm{Conf} \to \mathrm{Conf}$ i $\mathrm{next}_{\mathbb{P}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}(i; r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_d, 0 \cdots)$$

$$= \begin{cases} (\ell; r_1, \ldots, r_k + 1, \ldots, r_d, 0 \cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^+ \mid \ell, \\ (\ell_0; r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_d, 0 \cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^- \mid \ell_0, \ell_1 \text{ i } r_k = 0, \\ (\ell_1; r_1, \ldots, r_k - 1, \ldots, r_d, 0 \cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^- \mid \ell_0, \ell_1 \text{ i } r_k \neq 0, \\ (0; r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_d, 0 \cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ ne postoji.} \end{cases}$$

$$\boxed{(i, r_1, r_2, \ldots, r_d, 0, 0, 0, \ldots) \mapsto p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_d^{r_d}}$$

$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} : \mathrm{Conf} \to \mathrm{Conf}$ i $\mathrm{next}_{\mathbb{P}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}(i; r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_d, 0\cdots)$$

$$= \begin{cases} (\ell; r_1, \ldots, r_k + 1, \ldots, r_d, 0\cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^+ \mid \ell, \\ (\ell_0; r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_d, 0\cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^- \mid \ell_0, \ell_1 \text{ i } r_k = 0, \\ (\ell_1; r_1, \ldots, r_k - 1, \ldots, r_d, 0\cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^- \mid \ell_0, \ell_1 \text{ i } r_k \neq 0, \\ (0; r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_d, 0\cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ ne postoji.} \end{cases}$$

$$\boxed{(i, r_1, r_2, \ldots, r_d, 0, 0, 0, \ldots) \mapsto p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_d^{r_d}}$$

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{Conf} & \xrightarrow{\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}} & \mathrm{Conf} & \\ \text{kôd} & \downarrow & & \downarrow & \text{kôd} \\ & \mathbb{N} & \xrightarrow{\mathrm{next}_{\mathbb{P}}} & \mathbb{N} & \end{array}$$

$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} : \mathrm{Conf} \to \mathrm{Conf}$ i $\mathrm{next}_{\mathbb{P}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}(i; r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_d, 0 \cdots)$$

$$= \begin{cases} (\ell; r_1, \ldots, r_k + 1, \ldots, r_d, 0 \cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^+ \mid \ell, \\ (\ell_0; r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_d, 0 \cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^- \mid \ell_0, \ell_1 \text{ i } r_k = 0, \\ (\ell_1; r_1, \ldots, r_k - 1, \ldots, r_d, 0 \cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^- \mid \ell_0, \ell_1 \text{ i } r_k \neq 0, \\ (0; r_1, \ldots, r_k, \ldots, r_d, 0 \cdots), & i\text{-ta instrukcija u } \mathbb{P} \text{ ne postoji.} \end{cases}$$

$$\boxed{(i, r_1, r_2, \ldots, r_d, 0, 0, 0, \ldots) \mapsto p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_d^{r_d}}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \mathrm{Conf} & \xrightarrow{\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}} & \mathrm{Conf} & \\ \text{kôd} & \downarrow & & \downarrow & \text{kôd} \\ & \mathbb{N} & \xrightarrow{\mathrm{next}_{\mathbb{P}}} & \mathbb{N} & \end{array}$$

$$\mathrm{next}_{\mathbb{P}}(\text{kôd}(C)) = \text{kôd}(\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}(C))$$

$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}$ i $\mathrm{next}_{\mathbb{P}}$

- Ako je u programu $\mathbb{P}$ i-ta instrukcija $R_k^+ \mid \ell$:

$$\left.\begin{array}{lcl} C = i, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c = p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \\ \downarrow \mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} & & \\ C' = \ell, r_1, \ldots, r_k + 1, \ldots & \mapsto & c' = p_0^{\ell} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k+1} \cdots \end{array}\right\}$$

$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}$ i $\mathrm{next}_{\mathbb{P}}$

- Ako je u programu $\mathbb{P}$ i-ta instrukcija $R_k^+ \mid \ell$:

$$\left.\begin{array}{lcl} C = i, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c = p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \\ \downarrow \mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} & & \\ C' = \ell, r_1, \ldots, r_k + 1, \ldots & \mapsto & c' = p_0^{\ell} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k+1} \ldots \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{next}_{\mathbb{P}}(c) = c' = \frac{c}{p_0^{(c)_0}} \cdot p_0^{\ell} \cdot p_k$$

$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}$ i $\mathrm{next}_{\mathbb{P}}$

- Ako je u programu $\mathbb{P}$ i-ta instrukcija $R_k^+ \mid \ell$:

$$\left.\begin{array}{lcl} C = i, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c = p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \\ \downarrow \mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} & & \\ C' = \ell, r_1, \ldots, r_k + 1, \ldots & \mapsto & c' = p_0^{\ell} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k+1} \ldots \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{next}_{\mathbb{P}}(c) = c' = \frac{c}{p_0^{(c)_0}} \cdot p_0^{\ell} \cdot p_k$$

- Ako je u programu $\mathbb{P}$ i-ta instrukcija $R_k^- \mid \ell_1, \ell_2$ i $r_k \neq 0$:

$$\left.\begin{array}{lcl} C = i, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c = p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \\ \downarrow \mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} & & \\ C' = \ell_2, r_1, \ldots, r_k - 1, \ldots & \mapsto & c' = p_0^{\ell_2} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k-1} \ldots \end{array}\right\}$$

$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}$ i $\mathrm{next}_{\mathbb{P}}$

- Ako je u programu $\mathbb{P}$ i-ta instrukcija $R_k^+ \mid \ell$:

$$\left.\begin{array}{lcl} C = i, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c = p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \\ \downarrow \mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} & & \\ C' = \ell, r_1, \ldots, r_k + 1, \ldots & \mapsto & c' = p_0^{\ell} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k+1} \ldots \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{next}_{\mathbb{P}}(c) = c' = \frac{c}{p_0^{(c)_0}} \cdot p_0^{\ell} \cdot p_k$$

- Ako je u programu $\mathbb{P}$ i-ta instrukcija $R_k^- \mid \ell_1, \ell_2$ i $r_k \neq 0$:

$$\left.\begin{array}{lcl} C = i, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c = p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \\ \downarrow \mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} & & \\ C' = \ell_2, r_1, \ldots, r_k - 1, \ldots & \mapsto & c' = p_0^{\ell_2} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k-1} \ldots \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{next}_{\mathbb{P}}(c) = c' = \frac{c}{p_0^{(c)_0} \cdot p_k} \cdot p_0^{\ell_2}$$

$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}$ i $\mathrm{next}_{\mathbb{P}}$

- Ako je u programu $\mathbb{P}$ i-ta instrukcija $R_k^- \mid \ell_1, \ell_2$ i $r_k = 0$:

$$\left.\begin{array}{lcl} C = i, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c = p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \\ \downarrow \mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} & & \\ C' = \ell_1, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c' = p_0^{\ell_1} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \end{array}\right\}$$

$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}$ i $\mathrm{next}_{\mathbb{P}}$

- Ako je u programu $\mathbb{P}$ i-ta instrukcija $R_k^- \mid \ell_1, \ell_2$ i $r_k = 0$:

$$\left.\begin{array}{lcl} C = i, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c = p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \\ \downarrow \mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} & & \\ C' = \ell_1, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c' = p_0^{\ell_1} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{next}_{\mathbb{P}}(c) = c' = \frac{c}{p_0^{(c)_0}} \cdot p_0^{\ell_1}$$

$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}$ i $\mathrm{next}_{\mathbb{P}}$

- Ako je u programu $\mathbb{P}$ i-ta instrukcija $R_k^- \mid \ell_1, \ell_2$ i $r_k = 0$:

$$\left.\begin{array}{lcl} C = i, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c = p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \\ \downarrow \mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} & & \\ C' = \ell_1, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c' = p_0^{\ell_1} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{next}_{\mathbb{P}}(c) = c' = \frac{c}{p_0^{(c)_0}} \cdot p_0^{\ell_1}$$

- Ako u programu $\mathbb{P}$ ne postoji i-ta instrukcija:

$$\left.\begin{array}{lcl} C = i, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c = p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \\ \downarrow \mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} & & \\ C' = 0, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c' = p_0^{0} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \end{array}\right\}$$

$\mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}}$ i $\mathrm{next}_{\mathbb{P}}$

- Ako je u programu $\mathbb{P}$ i-ta instrukcija $R_k^- \mid \ell_1, \ell_2$ i $r_k = 0$:

$$\left.\begin{array}{lcl} C = i, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c = p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \\ \downarrow \mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} & & \\ C' = \ell_1, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c' = p_0^{\ell_1} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{next}_{\mathbb{P}}(c) = c' = \frac{c}{p_0^{(c)_0}} \cdot p_0^{\ell_1}$$

- Ako u programu $\mathbb{P}$ ne postoji i-ta instrukcija:

$$\left.\begin{array}{lcl} C = i, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c = p_0^i p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \\ \downarrow \mathrm{NEXT}_{\mathbb{P}} & & \\ C' = 0, r_1, \ldots, r_k, \ldots & \mapsto & c' = p_0^{0} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \cdots \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{next}_{\mathbb{P}}(c) = c' = \frac{c}{p_0^{(c)_0}}$$

$\mathrm{next}_{\mathbb{P}}$

Za svaki RM-program $\mathbb{P}$ funkcija $\mathrm{next}_{\mathbb{P}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathrm{next}_{\mathbb{P}}(c) = \begin{cases} \dfrac{c}{p_0^{(c)_0}} \cdot p_0^{\ell} \cdot p_k, & (c)_0\text{-ta ins. u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^+ \mid \ell, \\ \dfrac{c}{p_0^{(c)_0} \cdot p_k} \cdot p_0^{\ell_1}, & (c)_0\text{-ta ins. u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^- \mid \ell_1, \ell_2 \text{ i } (c)_k = 0, \\ \dfrac{c}{p_0^{(c)_0}} \cdot p_0^{\ell_2}, & (c)_0\text{-ta ins. u } \mathbb{P} \text{ je } R_k^- \mid \ell_1, \ell_2 \text{ i } (c)_k \neq 0, \\ \dfrac{c}{p_0^{(c)_0}}, & (c)_0\text{-ta ins. u } \mathbb{P} \text{ ne postoji.} \end{cases}$$

je primitivno rekurzivna.

Primer: $\mathrm{next}_{\mathbb{P}}$

$$\mathbb{P}\colon \begin{cases} 1. \quad R_2^- \mid 3, 2 \\ 2. \quad R_1^+ \mid 1 \end{cases}$$

Primer: $\mathrm{next}_{\mathbb{P}}$

$$\mathbb{P}\colon \begin{cases} 1. & R_2^- \mid 3,2 \\ 2. & R_1^+ \mid 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{next}_{\mathbb{P}}(c) = \begin{cases} \dfrac{c}{p_0^{(c)_0} \cdot p_2} \cdot p_0^2, & (c)_0 = 1 \wedge (c)_2 \neq 0, \\ \dfrac{c}{p_0^{(c)_0}} \cdot p_0^3, & (c)_0 = 1 \wedge (c)_2 = 0, \\ \dfrac{c}{p_0^{(c)_0}} \cdot p_0^1 \cdot p_1, & (c)_0 = 2, \\ \dfrac{c}{p_0^{(c)_0}}, & (c)_0 = 0 \vee (c)_0 > 2. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{c}{5}, & (c)_0 = 1 \wedge (c)_2 \neq 0, \\ 2^2 \cdot c, & (c)_0 = 1 \wedge (c)_2 = 0, \\ 3 \cdot \dfrac{c}{2}, & (c)_0 = 2, \\ \dfrac{c}{2^{(c)_0}}, & (c)_0 = 0 \vee (c)_0 > 2. \end{cases}$$

RM-izračunljivost i parcijalna rekurzivnost

Teorema

Svaka *RM*-izračunljiva funkcija je parcijalno rekurzivna.

DOKAZ. Neka je f proizvoljna k-arna *RM*-izračunljiva funkcija i $\mathbb{P}$ neki *RM*-program koji izračunava f.

RM-izračunljivost i parcijalna rekurzivnost

Teorema

Svaka *RM*-izračunljiva funkcija je parcijalno rekurzivna.

DOKAZ. Neka je f proizvoljna k-arna *RM*-izračunljiva funkcija i $\mathbb{P}$ neki *RM*-program koji izračunava f.

Funkcija $\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}}(\vec{x}, t) = \text{kôd konfiguracije koja se dostiže posle } t \text{ koraka izračunavanja programa } \mathbb{P} \text{ za ulaz } \vec{x},$$

je primitivno rekurzivna.

RM-izračunljivost i parcijalna rekurzivnost

Teorema

Svaka *RM*-izračunljiva funkcija je parcijalno rekurzivna.

DOKAZ. Neka je f proizvoljna k-arna *RM*-izračunljiva funkcija i $\mathbb{P}$ neki *RM*-program koji izračunava f.

Funkcija $\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}}(\vec{x}, t) = {} & \text{kôd konfiguracije koja se dostiže posle} \\ & t \text{ koraka izračunavanja programa } \mathbb{P} \text{ za ulaz } \vec{x},\end{aligned}$$

je primitivno rekurzivna.

Funkcija

$$\vec{x} \mapsto \mathrm{Halt}_{\mathbb{P}}(\vec{x}) = \mu t\,((\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}}(\vec{x}, t))_0 = 0).$$

je parcijalno rekurzivna.

RM-izračunljivost i parcijalna rekurzivnost

Teorema

Svaka *RM*-izračunljiva funkcija je parcijalno rekurzivna.

Dokaz. Neka je f proizvoljna k-arna *RM*-izračunljiva funkcija i $\mathbb{P}$ neki *RM*-program koji izračunava f.

Funkcija $\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}}(\vec{x}, t) = \text{kôd konfiguracije koja se dostiže posle } t \text{ koraka izračunavanja programa } \mathbb{P} \text{ za ulaz } \vec{x},$$

je primitivno rekurzivna.

Funkcija

$$\vec{x} \mapsto \mathrm{Halt}_{\mathbb{P}}(\vec{x}) = \mu t\,((\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}}(\vec{x}, t))_0 = 0).$$

je parcijalno rekurzivna.

$f(\vec{x}) = (\mathrm{Comp}_{\mathbb{P}}(\vec{x}, \mathrm{Halt}_{\mathbb{P}}(\vec{x})))_1$

Dve posledice prethodne teoreme

Posledica

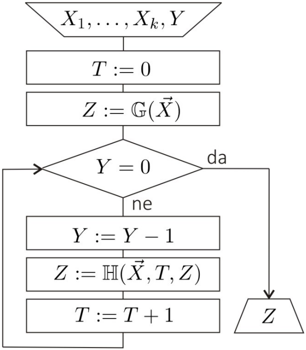
Funkcija je RM-izračunljiva akko je parcijalno rekurzivna.

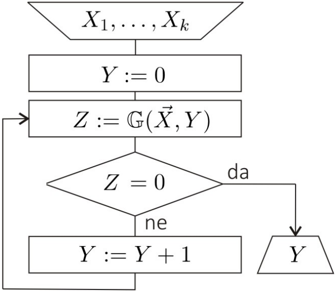
Posledica

Svaka parcijalno rekurzivna funkcija može se definisati kombinatorom u kome se pojavljuje najviše jedna neograničena minimizacija.

Pregled predavanja

Primitivne rekurzija i minimizacija





while-program

while-programe definišemo induktivno:

- $\mathrm{R}_k := \mathrm{R}_k + 1$ je while-program dubine 0 (za bilo koje $k \geqslant 1$);
- $\mathrm{R}_k := \mathrm{R}_k \dot{-} 1$ je while-program dubine 0 (za bilo koje $k \geqslant 1$);
- ako su $\mathbb{W}_1$ i $\mathbb{W}_2$ while-programi redom dubina n_1 i n_2, onda je i $(\mathbb{W}_1; \mathbb{W}_2)$ while-program dubine $\max\{n_1, n_2\}$;
- ako je $\mathbb{W}$ while-program dubine n, onda je i $(\text{while}\, \mathrm{R}_k \neq 0 \,\text{do}\, \mathbb{W})$ while-program dubine $n+1$ (za bilo koje $k \geqslant 1$).

while-program

while-programe definišemo induktivno:

- $\mathrm{R}_k := \mathrm{R}_k + 1$ je while-program dubine 0 (za bilo koje $k \geqslant 1$);
- $\mathrm{R}_k := \mathrm{R}_k \dot{-} 1$ je while-program dubine 0 (za bilo koje $k \geqslant 1$);
- ako su $\mathbb{W}_1$ i $\mathbb{W}_2$ while-programi redom dubina n_1 i n_2, onda je i $(\mathbb{W}_1; \mathbb{W}_2)$ while-program dubine $\max\{n_1, n_2\}$;
- ako je $\mathbb{W}$ while-program dubine n, onda je i $(\text{while}\, \mathrm{R}_k \neq 0\, \text{do}\, \mathbb{W})$ while-program dubine $n+1$ (za bilo koje $k \geqslant 1$).

Parcijalna k-arna funkcija f je while-**izračunljiva** ako postoji while-program $\mathbb{W}$ takav da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi:

- ako $\vec{x} \in \mathrm{dom}(f)$, onda se izvršavanje programa $\mathbb{W}$ za ulaz $\vec{x}$ zaustavlja i sadržaj prvog registra u završnoj konfiguraciji je $f(\vec{x})$;
- ako $\vec{x} \notin \mathrm{dom}(f)$, onda se izvršavanje programa $\mathbb{W}$ za ulaz $\vec{x}$ ne zaustavlja.

Primer

Sabiranje $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ je while-izračunljiva funkcija:

$$(\text{while } R_2 \neq 0 \text{ do } (R_1 := R_1 + 1; R_2 := R_2 \dot{-} 1))$$

Primer

Sabiranje $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ je while-izračunljiva funkcija:

$$(\text{while } R_2 \neq 0 \text{ do } (R_1 := R_1 + 1; R_2 := R_2 \dot{-} 1))$$

Prazna funkcija je while-izračunljiva:

$$(R_1 := R_1 + 1; (\text{while } R_1 \neq 0 \text{ do } R_1 := R_1 + 1))$$

Primer

Sabiranje $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ je while-izračunljiva funkcija:

$$(\mathsf{while}\ R_2 \neq 0\ \mathsf{do}\ (R_1 := R_1 + 1; R_2 := R_2 \dot{-} 1))$$

Prazna funkcija je while-izračunljiva:

$$(R_1 := R_1 + 1; (\mathsf{while}\ R_1 \neq 0\ \mathsf{do}\ R_1 := R_1 + 1))$$

Zadatak. Sve parcijalno rekurzivne funkcije su while-izračunljive.

Primer

Sabiranje $+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ je while-izračunljiva funkcija:

$$(\mathsf{while}\ \mathsf{R}_2 \neq 0\ \mathsf{do}\ (\mathsf{R}_1 := \mathsf{R}_1 + 1;\ \mathsf{R}_2 := \mathsf{R}_2 \dot{-} 1))$$

Prazna funkcija je while-izračunljiva:

$$(\mathsf{R}_1 := \mathsf{R}_1 + 1;\ (\mathsf{while}\ \mathsf{R}_1 \neq 0\ \mathsf{do}\ \mathsf{R}_1 := \mathsf{R}_1 + 1))$$

ZADATAK. Sve parcijalno rekurzivne funkcije su while-izračunljive.

ZADATAK. Svaki while-program može se simulirati nekim RM-programom.

for-program

for-programe definišemo induktivno:

- $\mathrm{R}_k := \mathrm{R}_k + 1$ je for-program dubine 0;
- $\mathrm{R}_k := \mathrm{R}_k \dot{-} 1$ je for-program dubine 0;
- ako su $\mathbb{F}_1$ i $\mathbb{F}_2$ for-programi redom dubina n_1 i n_2, onda je i $(\mathbb{F}_1; \mathbb{F}_2)$ for-program dubine $\max\{n_1, n_2\}$;
- ako je $\mathbb{F}$ for-program dubine n i R_k registar koji se ne pominje u $\mathbb{F}$, onda je (for R_k do $\mathbb{F}$) for-program dubine $n+1$.

for-program

Teorema

Funkcija je for-izračunljiva akko je primitivno rekurzivna.

for-program

Teorema

Funkcija je for-izračunljiva akko je primitivno rekurzivna.

DOKAZ – matematičkom indukcijom po dubini for-programa.

for-program

Teorema

Funkcija je for-izračunljiva akko je primitivno rekurzivna.

DOKAZ – matematičkom indukcijom po dubini for-programa.

Induktivna pretpostavka: tvrdjenje je tačno za sve for-programe dubine n.

for-program

Teorema

Funkcija je for-izračunljiva akko je primitivno rekurzivna.

DOKAZ – matematičkom indukcijom po dubini for-programa.

Induktivna pretpostavka: tvrdjenje je tačno za sve for-programe dubine n.

Neka je $\mathbb{F}$ oblika (for R_{k+1} do $\mathbb{F}'$), za neki for-program $\mathbb{F}'$ dubine n u kome se pominju samo registri $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_k$.

for-program

Teorema

Funkcija je for-izračunljiva akko je primitivno rekurzivna.

DOKAZ – matematičkom indukcijom po dubini for-programa.

Induktivna pretpostavka: tvrdjenje je tačno za sve for-programe dubine n.

Neka je $\mathbb{F}$ oblika (for R_{k+1} do $\mathbb{F}'$), za neki for-program $\mathbb{F}'$ dubine n u kome se pominju samo registri $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_k$.

Postoje primitivno rekurzivne funkcije $g_1, \ldots, g_n$ takve da:

$$g_i(x_1, \ldots, x_k) = \text{sadržaj registra } \mathrm{R}_i \text{ nakon izvršavanja programa } \mathbb{F}' \text{ za početnu konfiguraciju } (x_1, \ldots, x_k).$$

… dokaz

Za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka je $f_i(x_1, \ldots, x_n, y)$ sadržaj registra R_i nakon izvršavanja programa $\mathbb{F}'$ tačno y puta.

... dokaz

Za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka je $f_i(x_1, \ldots, x_n, y)$ sadržaj registra R_i nakon izvršavanja programa $\mathbb{F}'$ tačno y puta.

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, \ldots, x_n, 0) = x_1,\\
&\vdots\\
&f_n(x_1, \ldots, x_n, 0) = x_n,\\
&f_1(x_1, \ldots, x_n, y+1) = g_1(f_1(x_1, \ldots, x_n, y), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, y)),\\
&\vdots\\
&f_n(x_1, \ldots, x_n, y+1) = g_n(f_1(x_1, \ldots, x_n, y), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, y)).
\end{aligned}
$$

... dokaz

Za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka je $f_i(x_1, \ldots, x_n, y)$ sadržaj registra R_i nakon izvršavanja programa $\mathbb{F}'$ tačno y puta.

$$
\begin{aligned}
& f_1(x_1, \ldots, x_n, 0) = x_1, \\
& \vdots \\
& f_n(x_1, \ldots, x_n, 0) = x_n, \\
& f_1(x_1, \ldots, x_n, y+1) = g_1(f_1(x_1, \ldots, x_n, y), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, y)), \\
& \vdots \\
& f_n(x_1, \ldots, x_n, y+1) = g_n(f_1(x_1, \ldots, x_n, y), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n, y)).
\end{aligned}
$$

Skup primitivno rekurzivnih funkcija zatvoren je za definicije simultanom rekurzijom.