Primitivno rekurzivne funkcije

N. Ikodinović

ikodinovic@matf.bg.ac.rs

March 17, 2018

Pregled predavanja

Primitivno rekurzivne funkcije

Definicija

Skup primitivno rekurzivnih funkcija je najmanji skup u smislu inkluzije koji sadrži osnovne funkcije (nula-funkciju, funkciju sledbenika i projekcije) i zatvoren je za supstituciju i primitivnu rekurziju.

Podsećanje

(pr1) Za proizvoljne $k \geqslant 1$ i $m \in \mathbb{N}$, konstantna k-arna funkcija $\mathbf{m}_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $\mathbf{m}_k(\vec{x}) = m$ jeste primitivno rekurzivna.

(pr2) Sabiranje, množenje i stepenovanje jesu primitivno rekurzivne funkcije.
Ako su $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije, onda su primitivno rekurzivne i funkcije $\vec{x} \mapsto \sum_{i=1}^{m} g_i(\vec{x})$ i $\vec{x} \mapsto \prod_{i=1}^{m} g_i(\vec{x})$.

(pr3) Ako su $f, g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije, onda su takve i $(\vec{x}, y) \mapsto \sum\limits_{z < g(\vec{x}, y)} f(\vec{x}, z)$ i $(\vec{x}, y) \mapsto \prod\limits_{z < g(\vec{x}, y)} f(\vec{x}, z)$.

Pomoćno tvrdjenje

Teorema

(1) Ako je $g \in \mathbb{N}$ proizvoljna konstanta i $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija, onda je i funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa:

$$(\star) \left| \begin{array}{l} f(0) = g, \\ f(s(x)) = h(x, f(x)), \end{array} \right.$$

takodje primitivno rekurzivna.
(2) Ako je $g \in \mathbb{N}$ proizvoljna konstanta i h binarna parcijalno rekurzivna funkcija, onda je i unarna funkcija f data sa:

$$\left| \begin{array}{l} f(0) = g, \\ f(s(x)) \simeq h(x, f(x)), \end{array} \right.$$

takodje parcijalno rekurzivna.

Pomoćno tvrdjenje

Teorema

(1) Ako je $g \in \mathbb{N}$ proizvoljna konstanta i $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija, onda je i funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa:

$$(\star) \left| \begin{array}{l} f(0) = g, \\ f(s(x)) = h(x, f(x)), \end{array} \right.$$

takodje primitivno rekurzivna.

(2) Ako je $g \in \mathbb{N}$ proizvoljna konstanta i h binarna parcijalno rekurzivna funkcija, onda je i unarna funkcija f data sa:

$$\left| \begin{array}{l} f(0) = g, \\ f(s(x)) \simeq h(x, f(x)), \end{array} \right.$$

takodje parcijalno rekurzivna.

Faktorijel

Teorema

(1) Ako je $g \in \mathbb{N}$ proizvoljna konstanta i $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija, onda je i funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa:

$$(\star) \left| \begin{array}{l} f(0) = g, \\ f(s(x)) = h(x, f(x)), \end{array} \right.$$

takodje primitivno rekurzivna.

Funkcija f je dobijena **primitivnom rekurzijom konstante** g **i binarne funkcije** h; $f = \mathrm{Rec}^1(g, h)$.

Faktorijel

Teorema

(1) Ako je $g \in \mathbb{N}$ proizvoljna konstanta i $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija, onda je i funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa:

$$(\star)\left|\begin{array}{l} f(0) = g, \\ f(s(x)) = h(x, f(x)), \end{array}\right.$$

takodje primitivno rekurzivna.

Funkcija f je dobijena **primitivnom rekurzijom konstante g i binarne funkcije h**; $f = \mathrm{Rec}^1(g, h)$.

(pr4) Faktorijel je primitivo rekurzivna funkcija:

$$\left|\begin{array}{l} 0! = 1, \\ (s(x))! = x! \cdot s(x); \end{array}\right.$$

Faktorijel

Teorema

(1) Ako je $g \in \mathbb{N}$ proizvoljna konstanta i $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija, onda je i funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa:

$$(\star)\left|\begin{array}{l} f(0) = g, \\ f(s(x)) = h(x, f(x)), \end{array}\right.$$

takodje primitivno rekurzivna.

Funkcija f je dobijena **primitivnom rekurzijom konstante** g **i binarne funkcije** h; $f = \mathrm{Rec}^1(g, h)$.

(pr4) Faktorijel je primitivo rekurzivna funkcija:

$$\left|\begin{array}{l} 0! = 1, \\ (s(x))! = x! \cdot s(x); \end{array}\right.$$

$! = \mathrm{Rec}^1(1, \mathrm{Sup}^2_2(\cdot; \Pi^2_2, \mathrm{Sup}^2_1(s; \Pi^2_1)))$

Prethodnik, monus

(pr5) Prethodnik je primitivno rekurzivna funkcija:

$$\mathrm{pd} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \left| \begin{array}{l} \mathrm{pd}(0) = 0, \\ \mathrm{pd}(s(x)) = x. \end{array} \right.$$

Umesto $\mathrm{pd}(x)$ pišemo $x \dot{-} 1$.

Prethodnik, monus

(pr5) **Prethodnik** je primitivno rekurzivna funkcija:

$$\mathrm{pd} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \;\left|\; \begin{array}{l} \mathrm{pd}(0) = 0, \\ \mathrm{pd}(s(x)) = x. \end{array}\right.$$

Umesto $\mathrm{pd}(x)$ pišemo $x \dot{-} 1$.

(pr6) **Monus** je primitivno rekurzivna funkcija:

$$\dot{-} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \;\left|\; \begin{array}{l} x \dot{-} 0 = x, \\ x \dot{-} s(y) = \mathrm{pd}(x \dot{-} y). \end{array}\right.$$

Primitivno rekurzivne relacije

Definicija

Skup $R \subseteq \mathbb{N}^k$ (k-arna relacija skupa $\mathbb{N}$) je primitivno rekurzivan(-na) ako je takva odgovarajuća karakteristična funkcija $\chi_R : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,

$$\chi_R(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in R, \\ 0, & \vec{x} \notin R. \end{cases}$$

Primitivno rekurzivne relacije

Definicija

Skup $R \subseteq \mathbb{N}^k$ (k-arna relacija skupa $\mathbb{N}$) je primitivno rekurzivan(-na) ako je takva odgovarajuća karakteristična funkcija $\chi_R : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,

$$\chi_R(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in R, \\ 0, & \vec{x} \notin R. \end{cases}$$

(pr8) Skupovi $\mathbb{N}^+$ i $\{0\}$ jesu primitivno rekurzivni: $\chi_{\mathbb{N}^+}$ nazivamo **funkcija znaka** i označavamo $\mathrm{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a $\chi_{\{0\}}$ nazivamo **funkcija obrnutog znaka** i označavamo $\overline{\mathrm{sg}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$\left|\begin{array}{l} \mathrm{sg}(0) = 0, \\ \mathrm{sg}(s(x)) = 1; \end{array}\right| \begin{array}{l} \overline{\mathrm{sg}}(0) = 1, \\ \overline{\mathrm{sg}}(s(x)) = 0. \end{array}$$

Primitivno rekurzivne relacije

(pr9) Uredjenja $\leqslant$ i $\geqslant$ su primitivno rekurzivne relacije.

Primitivno rekurzivne relacije

(pr9) Uredjenja $\leqslant$ i $\geqslant$ su primitivno rekurzivne relacije.

$\chi_{\leqslant}(x,y) = \overline{\mathrm{sg}}(x \dot{-} y)$ i $\chi_{\geqslant}(x,y) = \overline{\mathrm{sg}}(y \dot{-} x)$.

Primitivno rekurzivne relacije

(pr9) Uredjenja $\leqslant$ i $\geqslant$ su primitivno rekurzivne relacije.

$\chi_{\leqslant}(x,y) = \overline{\mathrm{sg}}(x \dot{-} y)$ i $\chi_{\geqslant}(x,y) = \overline{\mathrm{sg}}(y \dot{-} x)$.

Stroga uredjenja $<$ i $>$ su takodje primitivno rekurzivne relacije:

(pr9) Uredjenja $\leqslant$ i $\geqslant$ su primitivno rekurzivne relacije.

$\chi_{\leqslant}(x,y) = \overline{\mathrm{sg}}(x \dot{-} y)$ i $\chi_{\geqslant}(x,y) = \overline{\mathrm{sg}}(y \dot{-} x)$.

Stroga uredjenja $<$ i $>$ su takodje primitivno rekurzivne relacije:

$\chi_{<}(x,y) = 1 \dot{-} \chi_{\geqslant}(x,y)$ i $\chi_{>}(x,y) = 1 \dot{-} \chi_{\leqslant}(x,y)$.

Primitivno rekurzivne relacije

(pr9) Uredjenja $\leqslant$ i $\geqslant$ su primitivno rekurzivne relacije.

$\chi_{\leqslant}(x,y) = \overline{\mathrm{sg}}(x \dot{-} y)$ i $\chi_{\geqslant}(x,y) = \overline{\mathrm{sg}}(y \dot{-} x)$.

Stroga uredjenja $<$ i $>$ su takodje primitivno rekurzivne relacije:

$\chi_{<}(x,y) = 1 \dot{-} \chi_{\geqslant}(x,y)$ i $\chi_{>}(x,y) = 1 \dot{-} \chi_{\leqslant}(x,y)$.

(pr10) Jednakost i **različitost** su primitivno rekurzivne relacije:

Primitivno rekurzivne relacije

(pr9) Uredjenja $\leqslant$ i $\geqslant$ su primitivno rekurzivne relacije.

$\chi_{\leqslant}(x,y) = \overline{\mathrm{sg}}(x \dot{-} y)$ i $\chi_{\geqslant}(x,y) = \overline{\mathrm{sg}}(y \dot{-} x)$.

Stroga uredjenja $<$ i $>$ su takodje primitivno rekurzivne relacije:

$\chi_{<}(x,y) = 1 \dot{-} \chi_{\geqslant}(x,y)$ i $\chi_{>}(x,y) = 1 \dot{-} \chi_{\leqslant}(x,y)$.

(pr10) Jednakost i **različitost** su primitivno rekurzivne relacije:

$\chi_{=}(x,y) = \chi_{\leqslant}(x,y) \cdot \chi_{\geqslant}(x,y)$ i $\chi_{\neq}(x,y) = 1 \dot{-} \chi_{=}(x,y)$.

Bulove operacije i ograničena kvantifikacija

Lema

(1) **Komplement** primitivno rekurzivnog skupa je primitivno rekurzivan skup: ako je $R \subseteq \mathbb{N}^k$ primitivno rekurzivan skup, onda je primitivno rekurzivan i skup $R^{\complement} = \mathbb{N}^k \setminus R$.

Bulove operacije i ograničena kvantifikacija

Lema

(1) **Komplement** primitivno rekurzivnog skupa je primitivno rekurzivan skup: ako je $R \subseteq \mathbb{N}^k$ primitivno rekurzivan skup, onda je primitivno rekurzivan i skup $R^{\complement} = \mathbb{N}^k \setminus R$.

DOKAZ: $\chi_{R^{\complement}}(\vec{x}) = 1 \dot{-} \chi_R(\vec{x})$

Bulove operacije i ograničena kvantifikacija

Lema

(1) **Komplement** primitivno rekurzivnog skupa je primitivno rekurzivan skup: ako je $R \subseteq \mathbb{N}^k$ primitivno rekurzivan skup, onda je primitivno rekurzivan i skup $R^\complement = \mathbb{N}^k \setminus R$.

Dokaz: $\chi_{R^\complement}(\vec{x}) = 1 \dot{-} \chi_R(\vec{x})$

(2) **Unija i presek** primitivno rekurzivnih skupova (iste dužine) jesu primitivno rekurzivni skupovi: ako su $P, Q \subseteq \mathbb{N}^k$ primitivno rekurzivni skupovi, onda su primitivno rekurzivni i skupovi $P \cap Q$ i $P \cup Q$.

Bulove operacije i ograničena kvantifikacija

Lema

(1) **Komplement** primitivno rekurzivnog skupa je primitivno rekurzivan skup: ako je $R \subseteq \mathbb{N}^k$ primitivno rekurzivan skup, onda je primitivno rekurzivan i skup $R^{\complement} = \mathbb{N}^k \setminus R$.

DOKAZ: $\chi_{R^{\complement}}(\vec{x}) = 1 \dot{-} \chi_R(\vec{x})$

(2) **Unija i presek** primitivno rekurzivnih skupova (iste dužine) jesu primitivno rekurzivni skupovi: ako su $P, Q \subseteq \mathbb{N}^k$ primitivno rekurzivni skupovi, onda su primitivno rekurzivni i skupovi $P \cap Q$ i $P \cup Q$.

DOKAZ: $\chi_{P \cap Q}(\vec{x}) = \chi_P(\vec{x}) \cdot \chi_Q(\vec{x})$; $P \cup Q = (P^{\complement} \cap Q^{\complement})^{\complement}$

Bulove operacije i ograničena kvantifikacija

Lema

(1) **Komplement** primitivno rekurzivnog skupa je primitivno rekurzivan skup: ako je $R \subseteq \mathbb{N}^k$ primitivno rekurzivan skup, onda je primitivno rekurzivan i skup $R^{\complement} = \mathbb{N}^k \setminus R$.
DOKAZ: $\chi_{R^{\complement}}(\vec{x}) = 1 \dot{-} \chi_R(\vec{x})$
(2) **Unija i presek** primitivno rekurzivnih skupova (iste dužine) jesu primitivno rekurzivni skupovi: ako su $P, Q \subseteq \mathbb{N}^k$ primitivno rekurzivni skupovi, onda su primitivno rekurzivni i skupovi $P \cap Q$ i $P \cup Q$.
DOKAZ: $\chi_{P\cap Q}(\vec{x}) = \chi_P(\vec{x}) \cdot \chi_Q(\vec{x})$; $P \cup Q = (P^{\complement} \cap Q^{\complement})^{\complement}$
(3) [**Ograničena kvantifikacija.**] Ako je $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ primitivno rekurzivna relacija, onda su primitivno rekurzivne i relacije $U, E \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ date sa:
$U(\vec{x}, y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z \leqslant y) R(\vec{x}, z)$ i $E(\vec{x}, y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists z \leqslant y) R(\vec{x}, z)$.

Bulove operacije i ograničena kvantifikacija

Lema

(1) **Komplement** primitivno rekurzivnog skupa je primitivno rekurzivan skup: ako je $R \subseteq \mathbb{N}^k$ primitivno rekurzivan skup, onda je primitivno rekurzivan i skup $R^{\complement} = \mathbb{N}^k \setminus R$.

DOKAZ: $\chi_{R^{\complement}}(\vec{x}) = 1 \dot{-} \chi_R(\vec{x})$

(2) **Unija i presek** primitivno rekurzivnih skupova (iste dužine) jesu primitivno rekurzivni skupovi: ako su $P, Q \subseteq \mathbb{N}^k$ primitivno rekurzivni skupovi, onda su primitivno rekurzivni i skupovi $P \cap Q$ i $P \cup Q$.

DOKAZ: $\chi_{P\cap Q}(\vec{x}) = \chi_P(\vec{x}) \cdot \chi_Q(\vec{x})$; $P \cup Q = (P^{\complement} \cap Q^{\complement})^{\complement}$

(3) [**Ograničena kvantifikacija.**] Ako je $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ primitivno rekurzivna relacija, onda su primitivno rekurzivne i relacije $U, E \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ date sa:

$U(\vec{x}, y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall z \leqslant y) R(\vec{x}, z)$ i $E(\vec{x}, y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists z \leqslant y) R(\vec{x}, z)$.

DOKAZ: $\chi_U(\vec{x}, y) = \prod_{z \leqslant y} \chi_R(\vec{x}, z)$; $\chi_E(\vec{x}, y) = \operatorname{sg}\left(\sum_{z \leqslant y} \chi_R(\vec{x}, z)\right)$

Definicija po slučajevima

Lema

Ako su $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije, i $R_1, \ldots, R_m \subseteq \mathbb{N}^k$ primitivno rekurzivne relacije, takve da je $R_i \cap R_j = \emptyset$, $i \neq j$ i $\cup_{i=1}^{m} R_i = \mathbb{N}^k$, onda je funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} f_1(\vec{x}), & \text{ako je } R_1(\vec{x}), \\ \vdots & \\ f_m(\vec{x}), & \text{ako je } R_m(\vec{x}), \end{cases}$$

primitivno rekurzivna.

Definicija po slučajevima

Lema

Ako su $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije, i $R_1, \ldots, R_m \subseteq \mathbb{N}^k$ primitivno rekurzivne relacije, takve da je $R_i \cap R_j = \emptyset$, $i \neq j$ i $\cup_{i=1}^m R_i = \mathbb{N}^k$, onda je funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} f_1(\vec{x}), & \text{ako je } R_1(\vec{x}), \\ \vdots & \\ f_m(\vec{x}), & \text{ako je } R_m(\vec{x}), \end{cases}$$

primitivno rekurzivna.

DOKAZ: $f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} (f_i(\vec{x}) \cdot \chi_{R_i}(\vec{x}))$

Ograničena minimizacija

Lema

Ako je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija, onda je i funkcija $M : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$,

$$M(\vec{x}, y) = (\mu z < y)(f(\vec{x}, z) = 0) = \begin{cases} u, & u < y, f(\vec{x}, u) = 0 \text{ i} \\ & (\forall v < u)\, f(\vec{x}, v) \neq 0, \\ y, & \text{inače,} \end{cases}$$

primitivno rekurzivna.

Ograničena minimizacija

Lema

Ako je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija, onda je i funkcija $M : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$,

$$M(\vec{x}, y) = (\mu z < y)(f(\vec{x}, z) = 0) = \begin{cases} u, & u < y, f(\vec{x}, u) = 0 \text{ i} \\ & (\forall v < u) f(\vec{x}, v) \neq 0, \\ y, & \text{inače,} \end{cases}$$

primitivno rekurzivna.

$$\begin{aligned} M(\vec{x}, 4) = \mathrm{sg}(f(\vec{x}, 0)) + \\ + \mathrm{sg}(f(\vec{x}, 0))\mathrm{sg}(f(\vec{x}, 1)) + \\ + \mathrm{sg}(f(\vec{x}, 0))\mathrm{sg}(f(\vec{x}, 1))\mathrm{sg}(f(\vec{x}, 2)) \\ + \mathrm{sg}(f(\vec{x}, 0))\mathrm{sg}(f(\vec{x}, 1))\mathrm{sg}(f(\vec{x}, 2))\mathrm{sg}(f(\vec{x}, 3)) \end{aligned}$$

Ograničena minimizacija

Lema

Ako je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija, onda je i funkcija $M : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$,

$$M(\vec{x}, y) = (\mu z < y)(f(\vec{x}, z) = 0) = \begin{cases} u, & u < y, f(\vec{x}, u) = 0 \text{ i} \\ & (\forall v < u) f(\vec{x}, v) \neq 0, \\ y, & \text{inače}, \end{cases}$$

primitivno rekurzivna.

DOKAZ: $M(\vec{x}, y) = \sum_{v<y} \prod_{u \leqslant v} \mathrm{sg}(f(\vec{x}, u))$

Ograničena minimizacija

Posledica

Ako su $f, g : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije, onda je i $(\vec{x}, y) \mapsto (\mu z < g(\vec{x}, y))(f(\vec{x}, z) = 0)$ primitivno rekurzivna funkcija.

Ograničena minimizacija

Posledica

Ako su $f, g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije, onda je i $(\vec{x}, y) \mapsto (\mu z < g(\vec{x}, y))(f(\vec{x}, z) = 0)$ primitivno rekurzivna funkcija.

Posledica

Ako je $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ primitivno rekurzivna relacija, onda je i funkcija

$$(\vec{x}, y) \mapsto (\mu z < g(\vec{x}, y))R(\vec{x}, z) \stackrel{\text{def}}{=} (\mu z < g(\vec{x}, y))(\chi_{R^\complement}(\vec{x}, z) = 0)$$

primitivno rekurzivna.

Količnik, ostatak, deljivost, prosti brojevi

(pr11) **Količnik**, uz dogovor da je $\left[\dfrac{y}{0}\right] = 0$, jeste primitivno rekurzivna funkcija:

$$\left[\frac{y}{x}\right] = \mathrm{sg}(x) \cdot (\mu k \leqslant y)(y < (k+1)x).$$

Količnik, ostatak, deljivost, prosti brojevi

(pr11) **Količnik**, uz dogovor da je $\left[\frac{y}{0}\right] = 0$, jeste primitivno rekurzivna funkcija:

$$\left[\frac{y}{x}\right] = \mathrm{sg}(x) \cdot (\mu k \leqslant y)(y < (k+1)x).$$

(pr12) **Ostatak**, uz dogovor da je $\mathrm{rm}(0, y) = y$, jeste primitivno rekurzivna funkcija: $\mathrm{rm}(x, y) = y \dot{-} \left(\left[\frac{y}{x}\right] \cdot x\right)$.

Količnik, ostatak, deljivost, prosti brojevi

(pr11) Količnik, uz dogovor da je $\left[\frac{y}{0}\right] = 0$, jeste primitivno rekurzivna funkcija:

$$\left[\frac{y}{x}\right] = \mathrm{sg}(x) \cdot (\mu k \leqslant y)(y < (k+1)x).$$

(pr12) Ostatak, uz dogovor da je $\mathrm{rm}(0, y) = y$, jeste primitivno rekurzivna funkcija: $\mathrm{rm}(x, y) = y \dot{-} \left(\left[\frac{y}{x}\right] \cdot x\right)$.

(pr13) Deljivost je primitivno rekurzivna relacija, jer važi $\chi_|(x, y) = \overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{rm}(x, y))$. Umesto $\chi_|$ pišemo div.

Količnik, ostatak, deljivost, prosti brojevi

(pr11) Količnik, uz dogovor da je $\left[\frac{y}{0}\right] = 0$, jeste primitivno rekurzivna funkcija:

$$\left[\frac{y}{x}\right] = \mathrm{sg}(x) \cdot (\mu k \leqslant y)(y < (k+1)x).$$

(pr12) Ostatak, uz dogovor da je $\mathrm{rm}(0, y) = y$, jeste primitivno rekurzivna funkcija: $\mathrm{rm}(x, y) = y \dot{-} \left(\left[\frac{y}{x}\right] \cdot x\right)$.

(pr13) Deljivost je primitivno rekurzivna relacija, jer važi $\chi_{|}(x, y) = \overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{rm}(x, y))$. Umesto $\chi_{|}$ pišemo div.

(pr14) Skup prostih brojeva $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ je primitivno rekurzivan:

$$\mathbb{P}(x) \Leftrightarrow x \geqslant 2 \wedge (\forall y \leqslant x)(y \mid x \Rightarrow y = 1 \vee y = x).$$

Rastavljanje na proste činioce

(pr15) **Niz prostih brojeva** je primitivno rekurzivan, jer je funkcija $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$p(x) = p_x = (x+1)\text{-i prost broj},$$

primitivno rekurzivna:

$$\begin{aligned} p_0 &= 2, \\ p_{x+1} &= (\mu y \leqslant p_x! + 1)(\mathbb{P}(y) \wedge y > p_x). \end{aligned}$$

Rastavljanje na proste činioce

(pr15) **Niz prostih brojeva** je primitivno rekurzivan, jer je funkcija $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$p(x) = p_x = (x+1)\text{-i prost broj},$$

primitivno rekurzivna:

$$\begin{aligned} p_0 &= 2, \\ p_{x+1} &= (\mu y \leqslant p_x! + 1)(\mathbb{P}(y) \land y > p_x). \end{aligned}$$

(pr16) **Rastavljanje na proste činioce**: Funkcija

$$(x, y) \mapsto (y)_x = (\mu k \leqslant y)(p_x^k \mid y \land \neg(p_x^{k+1} \mid y))$$

je primitivno rekurzivna.

$(y)_x$ je izložilac prostog broja p_x u kanonskoj reprezentaciji broja y

Kodiranje parova

(pr19) **Kodiranje parova** prirodnih brojeva, $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{N}^2 \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\to}} \mathbb{N}$,

$$\langle x_1, x_2\rangle = 2^{x_1}(2x_2+1)-1,$$

jeste primitivno rekurzivna funkcija.

Inverzna funkcija $\langle\cdot,\cdot\rangle^{-1}$ odredjena je primitivno rekurzivnim funkcijama $\langle\cdot\rangle_1, \langle\cdot\rangle_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\langle x\rangle_1 = (x+1)_0,\ \langle x\rangle_2 = \left[\frac{\frac{x+1}{2^{(x+1)_0}}-1}{2}\right],\ x \in \mathbb{N}.$$

Fibonačijev niz

ZADATAK. Funkcija $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$F(0) = F(1) = 1,$$
$$F(n+2) = F(n+1) + F(n),\ n \geqslant 0;$$

jeste primitivno rekurzivna.

Simultana rekurzija

Teorema simultane rekurzije

Ako su $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $h_1, \ldots, h_m : \mathbb{N}^{k+m+1} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije, onda su jednakostima

$$(\star)\begin{cases} f_1(\vec{x}, 0) = g_1(\vec{x}), \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}, 0) = g_m(\vec{x}), \\ f_1(\vec{x}, y+1) = h_1(\vec{x}, y, f_1(\vec{x}, y), \ldots, f_m(\vec{x}, y)), \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}, y+1) = h_m(\vec{x}, y, f_1(\vec{x}, y), \ldots, f_m(\vec{x}, y)), \end{cases}$$

na jedinstven način odredjene funkcije $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ koje su primitivno rekurzivne.

Iteracija

Iteracija je operator koji definišemo samo za unarne funkcije. Ako je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija, onda je i funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ data sa

$$\begin{aligned} F(x,0) &= x, \\ F(x,y+1) &= f(F(x,y)), \end{aligned}$$

primitivno rekurzivna.

Iteracija

Iteracija je operator koji definišemo samo za unarne funkcije. Ako je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija, onda je i funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ data sa

$$\begin{aligned} F(x,0) &= x, \\ F(x,y+1) &= f(F(x,y)), \end{aligned}$$

primitivno rekurzivna.

Umesto $F(x,y)$ piše se $f^y(x)$:

$$\begin{aligned} f^0(x) &= x, \\ f^{y+1}(x) &= f(f^y(x)). \end{aligned}$$

Iteracija

Teorema

Skup primitivno rekurzivnih funkcija je najmanji skup funkcija koji sadrži osnovne funkcije i (bilo koje primitivno rekurzivne) funkcije $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\langle\cdot\rangle_1$ i $\langle\cdot\rangle_2$ (koje omogućavaju kodiranje parova prirodnih brojeva) i zatvoren je za supstituciju i iteraciju (naravno, unarnih funkcija).

Binarna reprezentacija broja

Svaki $x \in \mathbb{N}$ ima jedinstven prikaz oblika $x = \sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,x} 2^i$, $c_i \in \{0,1\}$.

Dvostruko indeksirani niz $(c_{i,x})$ jeste zapravo jedna primitivno rekurzivna funkcija $\mathbf{c} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0,1\}$, $\mathbf{c}(i,x) = \mathrm{rm}(2, \left[\frac{x}{2^i}\right])$.

Napomena. $\mathbf{c}(i,x) = 0$ za $i \geqslant x$, jer za svako m važi $m < 2^m$.

Binarna reprezentacija broja

Svaki $x \in \mathbb{N}$ ima jedinstven prikaz oblika $x = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} c_{i,x} 2^i$, $c_i \in \{0,1\}$.
Dvostruko indeksirani niz $(c_{i,x})$ jeste zapravo jedna primitivno rekurzivna funkcija $\mathbf{c} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0,1\}$, $\mathbf{c}(i,x) = \mathrm{rm}(2, \left[\frac{x}{2^i}\right])$.

NAPOMENA. $\mathbf{c}(i,x) = 0$ za $i \geqslant x$, jer za svako m važi $m < 2^m$.

Ako je $x > 0$, onda postoji jedinstveni prikaz oblika

$$(*) \qquad x = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_k},\ 0 \leqslant b_1 < b_2 < \ldots < b_k, k \geqslant 1.$$

Binarna reprezentacija broja

Ako je $x > 0$, onda postoji jedinstveni prikaz oblika

$$(*) \qquad x = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_k},\ 0 \leqslant b_1 < b_2 < \ldots < b_k, k \geqslant 1.$$

Binarna reprezentacija broja

Ako je $x > 0$, onda postoji jedinstveni prikaz oblika

$$(*) \qquad x = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_k},\ 0 \leqslant b_1 < b_2 < \ldots < b_k, k \geqslant 1.$$

Primitivno rekurzivne funkcije su:

$$\mathrm{lh}(x) = \left\{ \begin{array}{cc} k \text{ u prikazu } (*), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{array} \right\} = \sum_{i<x} \mathbf{c}(i, x)$$

Binarna reprezentacija broja

Ako je $x > 0$, onda postoji jedinstveni prikaz oblika

$$(*) \qquad x = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_k},\ 0 \leqslant b_1 < b_2 < \ldots < b_k, k \geqslant 1.$$

Primitivno rekurzivne funkcije su:

$$\mathrm{lh}(x) = \left\{ \begin{array}{cc} k \text{ u prikazu } (*), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{array} \right\} = \sum_{i<x} \mathbf{c}(i,x)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(i,x) &= \begin{cases} b_i \text{ u prikazu } (*), & x > 0 \text{ i } 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{lh}(x), \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\mu k < x)\left(\sum\limits_{j\leqslant k} \mathbf{c}(j,x) = i\right), & x > 0 \text{ i } 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{lh}(x), \\ 0, & \text{inače}. \end{cases} \end{aligned}$$

Kodiranje konačnih nizova

$$\ulcorner () \urcorner = 0 \quad \text{(Kôd praznog niza je 0)}$$

$$\ulcorner x_1, \ldots, x_k \urcorner = 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1} + \cdots + 2^{x_1+x_2+\cdots+x_k+k-1}$$

$$= (1\underbrace{0\ldots0}_{x_k \text{ nula}}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{x_1 \text{ nula}})_2$$

Kodiranje konačnih nizova

$$\ulcorner () \urcorner = 0 \quad \text{(Kôd praznog niza je 0)}$$
$$\ulcorner x_1, \ldots, x_k \urcorner = 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1} + \cdots + 2^{x_1+x_2+\cdots+x_k+k-1}$$
$$= (1\underbrace{0\ldots0}_{x_k \text{ nula}}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{x_1 \text{ nula}})_2$$

Primitivno rekurzivne funkcije su:
$\mathrm{lh}(x) =$ dužina niza čiji je kôd x

Kodiranje konačnih nizova

$$\lceil () \rceil = 0 \quad \text{(Kôd praznog niza je 0)}$$

$$\begin{aligned} \lceil x_1, \ldots, x_k \rceil &= 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1} + \cdots + 2^{x_1+x_2+\cdots+x_k+k-1} \\ &= (1\underbrace{0\ldots0}_{x_k \text{ nula}}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{x_1 \text{ nula}})_2 \end{aligned}$$

Primitivno rekurzivne funkcije su:
$\mathrm{lh}(x) =$ dužina niza čiji je kôd x

$$\begin{aligned} (i,x) \mapsto \lfloor x \rfloor_i &= \begin{cases} i\text{-ti član niza čiji je kôd } x, & x > 0, 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{lh}(x), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathbf{b}(i,x) \dot{-} (\mathbf{b}(i \dot{-} 1, x) + 1), & x > 0, 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{lh}(x), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \end{aligned}$$

Kodiranje konačnih nizova

$$\ulcorner () \urcorner = 0 \quad \text{(Kôd praznog niza je 0)}$$

$$\ulcorner x_1, \ldots, x_k \urcorner = 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1} + \cdots + 2^{x_1+x_2+\cdots+x_k+k-1}$$

$$= (1\underbrace{0\ldots0}_{x_k \text{ nula}}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{x_1 \text{ nula}})_2$$

Primitivno rekurzivne funkcije su:
$\mathrm{lh}(x) =$ dužina niza čiji je kôd x

$$(i,x) \mapsto \lfloor x \rfloor_i = \begin{cases} i\text{-ti član niza čiji je kôd } x, & x > 0, 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{lh}(x), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbf{b}(i,x) \mathbin{\dot-} (\mathbf{b}(i \mathbin{\dot-} 1, x) + 1), & x > 0, 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{lh}(x), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Ako je } x > 0, \text{ onda je } x = \ulcorner \lfloor x \rfloor_1, \ldots, \lfloor x \rfloor_{\mathrm{lh}(x)} \urcorner.}$

Princip totalne rekurzije

Ako je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ proizvoljna funkcija, funkcija $\widehat{f} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ definisana sa

$$\widehat{f}(\vec{x}, y) = \lceil f(\vec{x}, y), \ldots, f(\vec{x}, 0) \rceil$$

naziva se **istorija** funkcije f.

Princip totalne rekurzije

Ako je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ proizvoljna funkcija, funkcija $\widehat{f} : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ definisana sa

$$\widehat{f}(\vec{x}, y) = \lceil f(\vec{x}, y), \dots, f(\vec{x}, 0) \rceil$$

naziva se **istorija** funkcije f.

Teorema

Ako su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije, onda je primitivno rekurzivna i funkcija $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ definisana sa:

$$f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}),$$
$$f(\vec{x}, y+1) = h(\vec{x}, y, \widehat{f}(\vec{x}, y))$$