Parcijalne RM-izračunljive funkcije

N. Ikodinović

ikodinovic@matf.bg.ac.rs

March 11, 2018

Pregled predavanja

Pregled predavanja

$W_{\mathbb{P}}^{(k)}$; $\varphi_{\mathbb{P}}^{(k)}$

Svaki RM-program $\mathbb{P}$ za svako $k \geqslant 1$ odredjuje podskup od $\mathbb{N}^k$:

$$W_{\mathbb{P}}^{(k)} = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \mathbb{P}(x_1, \ldots, x_k) \downarrow\},$$

i funkciju $\varphi_{\mathbb{P}}^{(k)} : W_{\mathbb{P}}^{(k)} \to \mathbb{N}$,

$$\varphi_{\mathbb{P}}^{(k)}(\vec{x}) = \text{sadržaju registra } R_1 \text{ u završnoj konfiguraciji}$$
$$\text{izračunavanja programa } \mathbb{P} \text{ za ulaz } \vec{x}.$$

$W_{\mathbb{P}}^{(k)}$; $\varphi_{\mathbb{P}}^{(k)}$

Svaki RM-program $\mathbb{P}$ za svako $k \geqslant 1$ odredjuje podskup od $\mathbb{N}^k$:

$$W_{\mathbb{P}}^{(k)} = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \mathbb{P}(x_1, \ldots, x_k) \downarrow\},$$

i funkciju $\varphi_{\mathbb{P}}^{(k)} : W_{\mathbb{P}}^{(k)} \to \mathbb{N}$,

$$\varphi_{\mathbb{P}}^{(k)}(\vec{x}) = \text{sadržaju registra } R_1 \text{ u završnoj konfiguraciji}$$
$$\text{izračunavanja programa } \mathbb{P} \text{ za ulaz } \vec{x}.$$

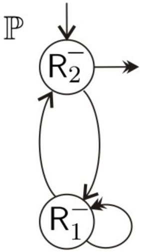
Napomena. Kada posmatramo unarnu funkciju koju izračunava neki program $\mathbb{P}$, umesto $\varphi_{\mathbb{P}}^{(1)}$ pišemo $\varphi_{\mathbb{P}}$.

Primer

Program $\mathbb{P}$: $1.\,R_2^- \mid 3,2 \;\; 2.\,R_1^- \mid 2,1$, za $k \geqslant 2$, izračunava parcijalnu funkciju (parcijalno oduzimanje)

$$\varphi_{\mathbb{P}}^{(k)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{cases} x_1 - x_2, & x_1 \geqslant x_2, \\ \uparrow, & x_1 < x_2. \end{cases}$$

Isti program izračunava i totalnu (unarnu) funkciju $\varphi_{\mathbb{P}}(x) = x$ (identičko preslikavanje).



Parcijalne funkcije

Funkciju $\varphi : D \to \mathbb{N}$, gde je $D \subseteq \mathbb{N}^k$, naziva se k-arna **parcijalna funkcija**; kada je $D = \mathbb{N}^k$ kažemo da je φ **totalna funkcija**.

Parcijalne funkcije

Funkciju $\varphi : D \to \mathbb{N}$, gde je $D \subseteq \mathbb{N}^k$, naziva se k-arna **parcijalna funkcija**; kada je $D = \mathbb{N}^k$ kažemo da je φ **totalna funkcija**.

Posebno, i prazan skup smatramo parcijalnom funkcijom i nazivamo je *prazna funkcija*. Domen prazne funkcije je prazan skup, i kako je $\emptyset \subseteq \mathbb{N}^k$, za svako $k \geqslant 1$, praznu funkciju možemo zamišljati kao funkciju bilo koje dužine.

Parcijalne funkcije

Funkciju $\varphi : D \to \mathbb{N}$, gde je $D \subseteq \mathbb{N}^k$, naziva se k-arna **parcijalna funkcija**; kada je $D = \mathbb{N}^k$ kažemo da je φ **totalna funkcija**.

Posebno, i prazan skup smatramo parcijalnom funkcijom i nazivamo je *prazna funkcija*. Domen prazne funkcije je prazan skup, i kako je $\emptyset \subseteq \mathbb{N}^k$, za svako $k \geqslant 1$, praznu funkciju možemo zamišljati kao funkciju bilo koje dužine.

OZNAKE:

$\mathrm{dom}(\varphi^{(k)})$ je domen k-arna parcijalna funkcije φ;

$\varphi(\vec{x})\downarrow$ označava da $\vec{x} \in \mathrm{dom}(\varphi)$;

$\varphi(\vec{x})\downarrow y$ znači da $\varphi(\vec{x})\downarrow \wedge \varphi(\vec{x}) = y$;

$\mathrm{ran}(\varphi) = \{\varphi^{(k)}(\vec{x}) \mid \varphi(\vec{x})\downarrow\}$;

$\varphi(\vec{x})\uparrow$ označava da $\vec{x} \notin \mathrm{dom}(\varphi)$;

Jednakost parcijalnih funkcija

Ako su φ i ψ dve parcijalne funkcije iste dužine k, za proizvoljno $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, formula $\varphi(\vec{x}) \simeq \psi(\vec{x})$ znači:

- ili obe vrednosti $\varphi(\vec{x})$ i $\psi(\vec{x})$ nisu definisane (tj. $\varphi(\vec{x})\uparrow$ i $\psi(\vec{x})\uparrow$)
- ili su obe vrednosti $\varphi(\vec{x})$ i $\psi(\vec{x})$ definisane i jednake (tj. $\varphi(\vec{x})\downarrow$, $\psi(\vec{x})\downarrow$ i $\varphi(\vec{x}) = \psi(\vec{x})$).

Jednakost parcijalnih funkcija

Ako su φ i ψ dve parcijalne funkcije iste dužine k, za proizvoljno $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, formula $\varphi(\vec{x}) \simeq \psi(\vec{x})$ znači:

- ili obe vrednosti $\varphi(\vec{x})$ i $\psi(\vec{x})$ nisu definisane (tj. $\varphi(\vec{x})\uparrow$ i $\psi(\vec{x})\uparrow$)
- ili su obe vrednosti $\varphi(\vec{x})$ i $\psi(\vec{x})$ definisane i jednake (tj. $\varphi(\vec{x})\downarrow$, $\psi(\vec{x})\downarrow$ i $\varphi(\vec{x}) = \psi(\vec{x})$).

Funkcije φ i ψ su jednake ako imaju isti domen i jednake vrednosti za sve argumenate (iz zajedničkog) domena:

$$\varphi = \psi \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \vec{x}\,(\varphi(\vec{x}) \simeq \psi(\vec{x})).$$

RM-izračunljiva funkcija

Definicija

Parcijalna k-arna funkcija φ je RM-izračunljiva ako postoji RM-program $\mathbb{P}$ takav da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi $\varphi(\vec{x}) \simeq \varphi_{\mathbb{P}}^{(k)}(\vec{x})$,

RM-izračunljiva funkcija

Definicija

Parcijalna k-arna funkcija φ je RM-izračunljiva ako postoji RM-program $\mathbb{P}$ takav da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi $\varphi(\vec{x}) \simeq \varphi_{\mathbb{P}}^{(k)}(\vec{x})$,odnosno:

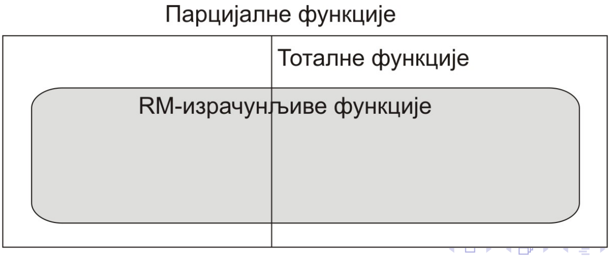
- ako $\vec{x} \in \mathrm{dom}(\varphi)$, onda se izvršavanje programa $\mathbb{P}$ za ulaz $\vec{x}$ zaustavlja i sadržaj registra R_1 u završnoj konfiguraciji je $\varphi(\vec{x})$;
- ako $\vec{x} \notin \mathrm{dom}(\varphi)$, onda se izvršavanje programa $\mathbb{P}$ za ulaz $\vec{x}$ ne zaustavlja.

RM-izračunljiva funkcija

Definicija

Parcijalna k-arna funkcija φ je RM-izračunljiva ako postoji RM-program $\mathbb{P}$ takav da za sve $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$ važi $\varphi(\vec{x}) \simeq \varphi_{\mathbb{P}}^{(k)}(\vec{x})$,odnosno:

- ako $\vec{x} \in \mathrm{dom}(\varphi)$, onda se izvršavanje programa $\mathbb{P}$ za ulaz $\vec{x}$ zaustavlja i sadržaj registra R_1 u završnoj konfiguraciji je $\varphi(\vec{x})$;
- ako $\vec{x} \notin \mathrm{dom}(\varphi)$, onda se izvršavanje programa $\mathbb{P}$ za ulaz $\vec{x}$ ne zaustavlja.



Osnovne RM-izračunljive funkcije

Lema

Osnovne funkcije:

- Nula-funkcija $\mathbf{0} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{0}(x) = 0$,
- Sledbenik $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s(x) = x + 1$,
- Projekcije $\Pi^k_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $\Pi^k_i(x_1, \ldots, x_k) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$,

jesu RM-izračunljive.

Osnovne RM-izračunljive funkcije

Lema

Osnovne funkcije:

- Nula-funkcija $\mathbf{0} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{0}(x) = 0$,
- Sledbenik $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s(x) = x + 1$,
- Projekcije $\Pi_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $\Pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$,

jesu RM-izračunljive.

DOKAZ.
Nula-funkcija: $R_1 := \varepsilon$
Sledbenik: 1. $R_1^+ \mid 2$
Projekcije: Ako je $i > 1$, funkciju Π_i^k izračunava program $R_1 := R_i$.
Ako je $i = 1$, funkciju Π_1^k izračunava (na primer) program:
1. $R_1^+ \mid 2$ 2. $R_1^- \mid 3, 3$.

Supstitucija

Ako su g_1, ..., g_m neke k-arne parcijalne funkcije i h neka m-arna parcijalna funkcija, onda za k-arnu funkciju f definisanu sa:

$$\text{(Sup)} \qquad f(\vec{x}) \simeq h(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})), \vec{x} \in \mathbb{N}^k$$

kažemo da je dobijena **supstitucijom** funkcija g_1, ..., g_m u h i pišemo $f = \mathrm{Sup}^k_m(h; g_1, \ldots, g_m)$.

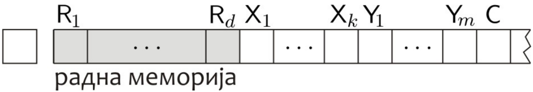
Teorema

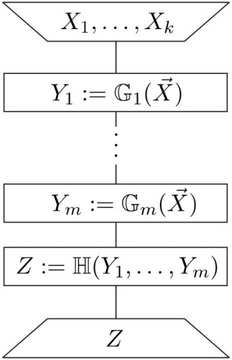
Ako su RM-izračunljive k-arne funkcije g_1, ..., g_m i m-arna funkcija h, onda je takva i funkcija $\mathrm{Sup}^k_m(h; g_1, \ldots, g_m)$.

Skup RM-izračunljivih funkcija je zatvoren za supstituciju

Neka su $\mathbb{G}_1, \ldots, \mathbb{G}_m$ i $\mathbb{H}$ redom programi koji izračunavaju k-arne funkcije $g_1, \ldots, g_m$ i m-arnu funkciju h. Neka je

$$d = \max\{k, m, ||\mathbb{G}_1||, \ldots, ||\mathbb{G}_m||, ||\mathbb{H}||\} + 1.$$





Primeri

Konstantne funkcije su RM-izračunljive.

$\mathbf{1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\mathbf{1}(x) = 1$ $[\mathbf{1} = \mathrm{Sup}_1^1(s; \mathbf{0})]$
$\mathbf{2} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\mathbf{2}(x) = 2$ $[\mathbf{2} = \mathrm{Sup}_1^1(s; \mathbf{1})]$

Primeri

Konstantne funkcije su RM-izračunljive.

$\mathbf{1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{1}(x) = 1$ $\quad [\mathbf{1} = \mathrm{Sup}^1_1(s; \mathbf{0})]$
$\mathbf{2} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{2}(x) = 2$ $\quad [\mathbf{2} = \mathrm{Sup}^1_1(s; \mathbf{1})]$
Za svako $m \in \mathbb{N}$, funkcija $\mathbf{m} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{m}(x) = m$ je RM-izračunljiva.

Primeri

Konstantne funkcije su RM-izračunljive.

$\mathbf{1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{1}(x) = 1$ $[\mathbf{1} = \mathrm{Sup}_1^1(s; \mathbf{0})]$
$\mathbf{2} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{2}(x) = 2$ $[\mathbf{2} = \mathrm{Sup}_1^1(s; \mathbf{1})]$
Za svako $m \in \mathbb{N}$, funkcija $\mathbf{m} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{m}(x) = m$ je RM-izračunljiva.
Za sve $m \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}^+$ funkcija $\mathbf{m}_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $\mathbf{m}_k(\vec{x}) = m$ je RM-izračunljiva. $[\mathbf{m}_k = \mathrm{Sup}_1^k(\mathbf{m}; \Pi_1^k)]$

Primeri

Konstantne funkcije su RM-izračunljive.

$\mathbf{1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{1}(x) = 1$ $[\mathbf{1} = \mathrm{Sup}^1_1(s; \mathbf{0})]$
$\mathbf{2} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{2}(x) = 2$ $[\mathbf{2} = \mathrm{Sup}^1_1(s; \mathbf{1})]$
Za svako $m \in \mathbb{N}$, funkcija $\mathbf{m} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{m}(x) = m$ je RM-izračunljiva.
Za sve $m \in \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}^+$ funkcija $\mathbf{m}_k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $\mathbf{m}_k(\vec{x}) = m$ je RM-izračunljiva. $[\mathbf{m}_k = \mathrm{Sup}^k_1(\mathbf{m}; \Pi^k_1)]$

Premeštanje i fiksiranje argumenata: ako je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ RM-izračunljiva funkcija, takva će biti i m-arna funkcija h':

$$h'(x_1, \ldots, x_m) \simeq h(\underbrace{-}_{(1)}, \ldots, \underbrace{-}_{(k)}),$$

koju definišemo tako što na mesta (1), ..., (k) upisujemo, u proizvoljnom poretku uz moguća ponavljanja, promenljive $x_1, \ldots, x_m$ ili konstante.

Primitivna rekurzija

Ako je g neka k-arna parcijalna funkcija i h neka $(k+2)$-arna parcijalna funkcija, onda za $(k+1)$-arnu funkciju f definisanu sa:

$$(\mathrm{Rec}) \qquad \left| \begin{array}{l} f(\vec{x},0) \simeq g(\vec{x}), \\ f(\vec{x},y+1) \simeq h(\vec{x},y,f(\vec{x},y)), \end{array} \right.$$

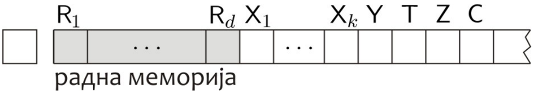
kažemo da je dobijena **primitivnom rekurzijom** funkcija g i h i pišemo $f = \mathrm{Rec}^{k+1}(g,h)$.

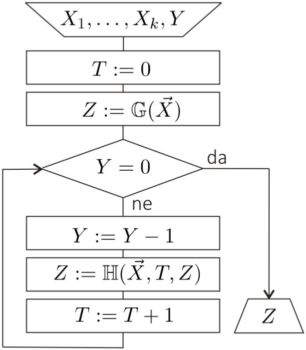
Teorema

Ako su RM-izračunljive k-arna funkcija g i $(k+2)$-arna funkcija h, onda je takva i funkcija $\mathrm{Rec}^{k+1}(g,h)$.

Skup RM-izračunljivih funkcija je zatvoren za primitivnu rekurziju

Ako programi $\mathbb{G}$ i $\mathbb{H}$ redom izračunavaju k-arnu funkciju g i $(k+2)$-arnu funkciju h, neka je $d = \max\{k+2, ||\mathbb{G}||, ||\mathbb{H}||\}$.





Primeri

Sabiranje je RM-izračunljiva funkcija.

Primeri

Sabiranje je RM-izračunljiva funkcija.

$$\begin{array}{|l} +(x,0) = x \\ +(x,s(y)) = s(+(x,y)) \end{array}$$

Primeri

Sabiranje je RM-izračunljiva funkcija.

$$\begin{aligned} +(x,0) &= x \\ +(x,s(y)) &= s(+(x,y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,0) &= g(x) \\ f(x,s(y)) &= h(x,y,f(x,y)) \end{aligned}$$

Primeri

Sabiranje je RM-izračunljiva funkcija.

$$\left|\begin{array}{l} +(x,0) = x \\ +(x,s(y)) = s(+(x,y)) \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} f(x,0) = g(x) \\ f(x,s(y)) = h(x,y,f(x,y)) \end{array}\right.$$

$$+ = \mathrm{Rec}^2(\Pi^1_1;\mathrm{Sup}^3_1(s;\Pi^3_3)) \left|\begin{array}{l} +(x,0) = \Pi^1_1(x) \\ +(x,s(y)) = s \circ \Pi^3_3(x,y,+(x,y)) \end{array}\right.$$

Primeri

Sabiranje je RM-izračunljiva funkcija.

$$\left| \begin{array}{l} +(x,0) = x \\ +(x,s(y)) = s(+(x,y)) \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} f(x,0) = g(x) \\ f(x,s(y)) = h(x,y,f(x,y)) \end{array} \right.$$

$$+ = \mathrm{Rec}^2(\Pi^1_1; \mathrm{Sup}^3_1(s;\Pi^3_3)) \left| \begin{array}{l} +(x,0) = \Pi^1_1(x) \\ +(x,s(y)) = s \circ \Pi^3_3(x,y,+(x,y)) \end{array} \right.$$

Množenje i stepenovanje su RM-izračunljive funkcije.

$$\left| \begin{array}{l} \cdot(x,0) = 0 \\ \cdot(x,s(y)) = +(\cdot(x,y),x) \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} \exp(x,0) = 1 \\ \exp(x,s(y)) = \cdot(\exp(x,y),x) \end{array} \right.$$

$$\cdot = \mathrm{Rec}^2(\mathbf{0}, \mathrm{Sup}^3_1(+;\Pi^3_3,\Pi^3_1)) \qquad \exp = \mathrm{Rec}^2(\mathbf{1}, \mathrm{Sup}^3_2(\cdot;\Pi^3_3,\Pi^3_1))$$

Primeri

Za bilo koje $k \geqslant 3$, RM-izračunljive su sledeće k-arne funkcije:

$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_1 + \cdots + x_k = \sum_{i=1}^{k} x_i \text{ i } (x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = \prod_{i=1}^{k} x_i.$$

Primeri

Za bilo koje $k \geqslant 3$, RM-izračunljive su sledeće k-arne funkcije:

$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_1 + \cdots + x_k = \sum_{i=1}^{k} x_i \text{ i } (x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_1 \cdot \ldots \cdot x_k = \prod_{i=1}^{k} x_i.$$

Zbog zatvorenosti za supstituciju, ako su k-arne funkcije $g_1, \ldots, g_m$ RM-izračunljive, takve su i funkcije:

$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto \sum_{i=1}^{m} g_i(\vec{x}) \text{ i } (x_1, \ldots, x_k) \mapsto \prod_{i=1}^{m} g_i(\vec{x}).$$

Ograničeni zbir i proizvod

Ako je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ bilo koja RM-izračunljiva funkcija, tada su funkcije $Z, P : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ definisane jednakostima:

$$\left| \begin{array}{l} Z(\vec{x},0) = 0, \\ Z(\vec{x},y+1) \simeq Z(\vec{x},y) + f(\vec{x},y), \end{array} \right. \quad \text{i} \quad \left| \begin{array}{l} P(\vec{x},0) = 1, \\ P(\vec{x},y+1) \simeq P(\vec{x},y) \cdot f(\vec{x},y). \end{array} \right.$$

takodje RM-izračunljive.

Ograničeni zbir i proizvod

Ako je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ bilo koja RM-izračunljiva funkcija, tada su funkcije $Z, P : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ definisane jednakostima:

$$\left|\begin{array}{l} Z(\vec{x},0) = 0, \\ Z(\vec{x},y+1) \simeq Z(\vec{x},y) + f(\vec{x},y), \end{array}\right. \quad \text{i} \quad \left|\begin{array}{l} P(\vec{x},0) = 1, \\ P(\vec{x},y+1) \simeq P(\vec{x},y) \cdot f(\vec{x},y). \end{array}\right.$$

takodje RM-izračunljive.

Oznake.

Umesto $Z(\vec{x},y)$ pišemo $\sum\limits_{z<y} f(\vec{x},z)$ $\qquad \sum\limits_{z<0} f(\vec{x},z) = 0$

Umesto $P(\vec{x},y)$ pišemo $\prod\limits_{z<y} f(\vec{x},z)$ $\qquad \prod\limits_{z<0} f(\vec{x},z) = 1$

Ograničeni zbir i proizvod

Ako je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ bilo koja RM-izračunljiva funkcija, tada su funkcije $Z, P : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ definisane jednakostima:

$$\left| \begin{array}{l} Z(\vec{x},0) = 0, \\ Z(\vec{x},y+1) \simeq Z(\vec{x},y) + f(\vec{x},y), \end{array} \right. \quad \text{i} \quad \left| \begin{array}{l} P(\vec{x},0) = 1, \\ P(\vec{x},y+1) \simeq P(\vec{x},y) \cdot f(\vec{x},y). \end{array} \right.$$

takodje RM-izračunljive.

OZNAKE.

Umesto $Z(\vec{x},y)$ pišemo $\sum\limits_{z<y} f(\vec{x},z)$ $\qquad \sum\limits_{z<0} f(\vec{x},z) = 0$

Umesto $P(\vec{x},y)$ pišemo $\prod\limits_{z<y} f(\vec{x},z)$ $\qquad \prod\limits_{z<0} f(\vec{x},z) = 1$

Ako su $f, g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ neke RM-izračunljive, takve su i funkcije:

$$(\vec{x},y) \mapsto \sum_{z<g(\vec{x},y)} f(\vec{x},z) \quad \text{i} \quad (\vec{x},y) \mapsto \prod_{z<g(\vec{x},y)} f(\vec{x},z)$$

Neograničena minimizacija

Ako je g neka $(k+1)$-arna parcijalna funkcija, onda za k-arnu funkciju f takvu da je

$$f(\vec{x}) = \mu y(g(\vec{x},y)=0) = \begin{cases} y, & y \text{ je najmanji prirodan broj} \\ & \text{takav da je } g(\vec{x},y)=0 \text{ i važi} \\ & (\forall z<y)(g(\vec{x},z)\downarrow \wedge g(\vec{x},z)\neq 0) \\ \uparrow, & \text{inače.} \end{cases}$$

kažemo da je dobijena (neograničenom) **minimizacijom** funkcije g, i pišemo $f = \mathrm{Min}^k(g)$.

Neograničena minimizacija

Ako je g neka $(k+1)$-arna parcijalna funkcija, onda za k-arnu funkciju f takvu da je

$$f(\vec{x}) = \mu y(g(\vec{x},y)=0) = \begin{cases} y, & y \text{ je najmanji prirodan broj} \\ & \text{takav da je } g(\vec{x},y)=0 \text{ i važi} \\ & (\forall z < y)(g(\vec{x},z)\downarrow \wedge g(\vec{x},z)\neq 0) \\ \uparrow, & \text{inače.} \end{cases}$$

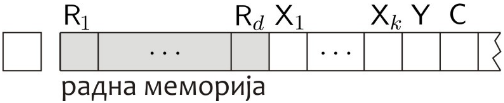
kažemo da je dobijena (neograničenom) **minimizacijom** funkcije g, i pišemo $f = \mathrm{Min}^k(g)$.

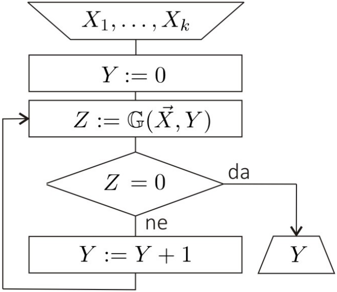
Teorema

Ako je RM-izračunljiva $(k+1)$-arna funkcija g, onda je takva i funkcija $\mathrm{Min}^k(g)$.

Skup RM-izračunljivih funkcija je zatvoren za neograničenu minimizaciju

Ako je $\mathbb{G}$ RM-program koji izračunava $(k+1)$-arnu funkciju g, neka je $d = \max\{k+1, ||\mathbb{G}||\}$.





Primeri

Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \uparrow, & x > 0, \end{cases}$$

je RM-izračunljiva, jer je

Primeri

Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \uparrow, & x > 0, \end{cases}$$

je RM-izračunljiva, jer je $f(x) = \mu y(x + y = 0)$, tj. $f = \mathrm{Min}^1(+)$.

Pregled predavanja

1. RM-izračunljive funkcije
2. Kombinatori i drvo izračunavanja

Operatori $\mathrm{Sup}, \mathrm{Rec}, \mathrm{Min}$

Neka je $\mathcal{F}_k$, $k \geqslant 1$, skup svih k-arnih parcijalnih funkcija.

Operatori $\mathrm{Sup}, \mathrm{Rec}, \mathrm{Min}$

Neka je $\mathcal{F}_k$, $k \geqslant 1$, skup svih k-arnih parcijalnih funkcija.

Operatori:

- $\mathrm{Sup}_m^k : \mathcal{F}_m \times \underbrace{\mathcal{F}_k \times \cdots \times \mathcal{F}_k}_{m \text{ puta}} \to \mathcal{F}_k$, $m \geqslant 1$;
- $\mathrm{Rec}^{k+1} : \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_{k+2} \to \mathcal{F}_{k+1}$;
- $\mathrm{Min}^k : \mathcal{F}_{k+1} \to \mathcal{F}_k$.

Operatori $\mathrm{Sup}, \mathrm{Rec}, \mathrm{Min}$

Neka je $\mathcal{F}_k$, $k \geqslant 1$, skup svih k-arnih parcijalnih funkcija.

Operatori:

- $\mathrm{Sup}^k_m : \mathcal{F}_m \times \underbrace{\mathcal{F}_k \times \cdots \times \mathcal{F}_k}_{m \text{ puta}} \to \mathcal{F}_k$, $m \geqslant 1$;
- $\mathrm{Rec}^{k+1} : \mathcal{F}_k \times \mathcal{F}_{k+2} \to \mathcal{F}_{k+1}$;
- $\mathrm{Min}^k : \mathcal{F}_{k+1} \to \mathcal{F}_k$.

Osnovne funkcije:

- nula-funkcije $\mathbf{0} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mathbf{0}(x) = 0$,
- sledbenika $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s(x) = x + 1$,
- projekcija $\Pi^k_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $\Pi^k_i(x_1, \ldots, x_k) = x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$,

Parcijalno rekurzivne funkcije

Definicija

Skup parcijalno rekurzivnih funkcija je najmanji skup u smislu inkluzije koji sadrži osnovne funkcije (nula-funkciju, funkciju sledbenika i projekcije) i zatvoren je za supstituciju, primitivnu rekurziju i neograničenu minimizaciju.

Parcijalno rekurzivne funkcije

Definicija

Skup parcijalno rekurzivnih funkcija je najmanji skup u smislu inkluzije koji sadrži osnovne funkcije (nula-funkciju, funkciju sledbenika i projekcije) i zatvoren je za supstituciju, primitivnu rekurziju i neograničenu minimizaciju.

Teorema

Svaka parcijalno rekurzivna funkcija je RM-izračunljiva.

Kombinatori

Parcijalno rekurzivne funkcije opisujemo pomoću **kombinatora**:

- $\mathbf{0}$, s, Π_1^1 su unarni kombinatori, dok su za $k > 1$, Π_i^k, $1 \leqslant i \leqslant k$ k-arni kombinatori;
- ako su g_1, ..., g_m neki k-arni kombinatori i h neki m-arni kombinator, onda je $\mathrm{Sup}_m^k(h; g_1, \ldots, g_m)$ k-arni kombinator;
- ako je g neki k-arni kombinator i h neki $k+2$-arni kombinator, onda je $\mathrm{Rec}^{k+1}(g, h)$ jedan $(k+1)$-arni kombinator;
- ako je g neki $(k+1)$-arni kombinator, onda je $\mathrm{Min}^k(g)$ jedan k-arni kombinator.

Kombinatori

Parcijalno rekurzivne funkcije opisujemo pomoću **kombinatora**:

- $\mathbf{0}$, s, Π_1^1 su unarni kombinatori, dok su za $k > 1$, Π_i^k, $1 \leqslant i \leqslant k$ k-arni kombinatori;
- ako su $g_1, \ldots, g_m$ neki k-arni kombinatori i h neki m-arni kombinator, onda je $\mathrm{Sup}_m^k(h; g_1, \ldots, g_m)$ k-arni kombinator;
- ako je g neki k-arni kombinator i h neki $k+2$-arni kombinator, onda je $\mathrm{Rec}^{k+1}(g, h)$ jedan $(k+1)$-arni kombinator;
- ako je g neki $(k+1)$-arni kombinator, onda je $\mathrm{Min}^k(g)$ jedan k-arni kombinator.

Svaka k-arna parcijalno rekurzivna funkcija može se opisati nekim kombinatorom i obrnuto, svaki kombinator odredjuje jednu parcijalno rekurzivnu funkciju odgovarajuće dužine.

Svaki kombinator opisuje postupak izračunavanja vrednosti funkcije koju definiše

Ako je f neki k-arni kombinator i $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, uspešno izračunavanje vrednosti $f(\vec{x})$ potvrdjuje jednakost $f(\vec{x}) = z$:

- koja se neposredno dobija u slučaju osnovnih kombinatora:

$$\mathbf{0}(x) = 0, \quad s(x) = x + 1, \quad \Pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i,$$

Svaki kombinator opisuje postupak izračunavanja vrednosti funkcije koju definiše

Ako je f neki k-arni kombinator i $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, uspešno izračunavanje vrednosti $f(\vec{x})$ potvrdjuje jednakost $f(\vec{x}) = z$:

- koja se neposredno dobija u slučaju osnovnih kombinatora:

$$\mathbf{0}(x) = 0, \quad s(x) = x + 1, \quad \Pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i,$$

- a u slučaju složenijih kombinatora:
  - ako $f = \mathrm{Sup}_m^k(h; g_1, \ldots, g_m)$, onda je jednakost $f(\vec{x}) = z$ posledica jednakosti $g_1(\vec{x}) = z_1, \ldots, g_m(\vec{x}) = z_m, h(z_1, \ldots, z_m) = z$,

Svaki kombinator opisuje postupak izračunavanja vrednosti funkcije koju definiše

Ako je f neki k-arni kombinator i $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, uspešno izračunavanje vrednosti $f(\vec{x})$ potvrdjuje jednakost $f(\vec{x}) = z$:

- koja se neposredno dobija u slučaju osnovnih kombinatora:

$$\mathbf{0}(x) = 0, \quad s(x) = x + 1, \quad \Pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i,$$

- a u slučaju složenijih kombinatora:
  - ako $f = \mathrm{Sup}_m^k(h; g_1, \ldots, g_m)$, onda je jednakost $f(\vec{x}) = z$ posledica jednakosti $g_1(\vec{x}) = z_1, \ldots, g_m(\vec{x}) = z_m, h(z_1, \ldots, z_m) = z$,
  - ako $f = \mathrm{Rec}^{k+1}(g, h)$, onda je jednakost $f(\vec{x}, 0) = z$ posledica jednakosti $g(\vec{x}) = z$, dok je $f(\vec{x}, y+1) = z$ posledica jednakosti $f(\vec{x}, y) = z_1$ i $h(\vec{x}, y, z_1) = z$,

Svaki kombinator opisuje postupak izračunavanja vrednosti funkcije koju definiše

Ako je f neki k-arni kombinator i $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, uspešno izračunavanje vrednosti $f(\vec{x})$ potvrdjuje jednakost $f(\vec{x}) = z$:

- koja se neposredno dobija u slučaju osnovnih kombinatora:

$$\mathbf{0}(x) = 0, \quad s(x) = x + 1, \quad \Pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i,$$

- a u slučaju složenijih kombinatora:
  - ako $f = \mathrm{Sup}_m^k(h; g_1, \ldots, g_m)$, onda je jednakost $f(\vec{x}) = z$ posledica jednakosti $g_1(\vec{x}) = z_1, \ldots, g_m(\vec{x}) = z_m, h(z_1, \ldots, z_m) = z$,
  - ako $f = \mathrm{Rec}^{k+1}(g, h)$, onda je jednakost $f(\vec{x}, 0) = z$ posledica jednakosti $g(\vec{x}) = z$, dok je $f(\vec{x}, y+1) = z$ posledica jednakosti $f(\vec{x}, y) = z_1$ i $h(\vec{x}, y, z_1) = z$,
  - ako $f = \mathrm{Min}^k(g)$, onda je jednakost $f(\vec{x}) = z$ posledica jednakosti $g(\vec{x}, 0) = z_0$, $g(\vec{x}, 1) = z_1$, ..., $g(\vec{x}, z \dot{-} 1) = z_m$, $g(\vec{x}, z) = 0$, za neke $z_0, z_1, \ldots, z_m$ različite od nule.

Svaki kombinator opisuje postupak izračunavanja vrednosti funkcije koju definiše

Ako je f neki k-arni kombinator i $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, uspešno izračunavanje vrednosti $f(\vec{x})$ potvrdjuje jednakost $f(\vec{x}) = z$:

- koja se neposredno dobija u slučaju osnovnih kombinatora:

$$\mathbf{0}(x) = 0, \quad s(x) = x + 1, \quad \Pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i,$$

- a u slučaju složenijih kombinatora:
    - ako $f = \mathrm{Sup}_m^k(h; g_1, \ldots, g_m)$, onda je jednakost $f(\vec{x}) = z$ posledica jednakosti $g_1(\vec{x}) = z_1, \ldots, g_m(\vec{x}) = z_m, h(z_1, \ldots, z_m) = z$,
    - ako $f = \mathrm{Rec}^{k+1}(g, h)$, onda je jednakost $f(\vec{x}, 0) = z$ posledica jednakosti $g(\vec{x}) = z$, dok je $f(\vec{x}, y + 1) = z$ posledica jednakosti $f(\vec{x}, y) = z_1$ i $h(\vec{x}, y, z_1) = z$,
    - ako $f = \mathrm{Min}^k(g)$, onda je jednakost $f(\vec{x}) = z$ posledica jednakosti $g(\vec{x}, 0) = z_0$, $g(\vec{x}, 1) = z_1$, ..., $g(\vec{x}, z \dot{-} 1) = z_m$, $g(\vec{x}, z) = 0$, za neke $z_0, z_1, \ldots, z_m$ različite od nule.

Drvo izračunavanja

Uspešno izračunavanje vrednosti $f(\vec{x})$ može se prikazati i u obliku tzv. **drveta izračunavanja** čiji su čvorovi označeni odgovarajućim jednakostima, pri čemu je *koren drveta* jednakost $f(\vec{x}) = z$, za neko $z \in \mathbb{N}$,

Drvo izračunavanja

Uspešno izračunavanje vrednosti $f(\vec{x})$ može se prikazati i u obliku tzv. **drveta izračunavanja** čiji su čvorovi označeni odgovarajućim jednakostima, pri čemu je *koren drveta* jednakost $f(\vec{x}) = z$, za neko $z \in \mathbb{N}$, *listovi drveta* (čvorovi bez naslednika) su oblika:

$$\mathbf{0}(x) \stackrel{\bullet}{=} 0 \qquad s(x) \stackrel{\bullet}{=} x + 1 \qquad \Pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) \stackrel{\bullet}{=} x_i$$

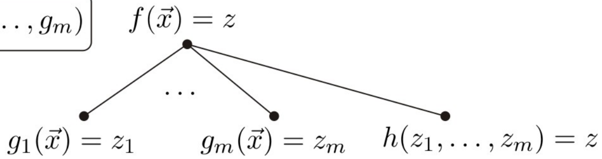
Drvo izračunavanja

Uspešno izračunavanje vrednosti $f(\vec{x})$ može se prikazati i u obliku tzv. **drveta izračunavanja** čiji su čvorovi označeni odgovarajućim jednakostima, pri čemu je *koren drveta* jednakost $f(\vec{x}) = z$, za neko $z \in \mathbb{N}$, *listovi drveta* (čvorovi bez naslednika) su oblika:

$$\mathbf{0}(x) \overset{\bullet}{=} 0 \qquad s(x) \overset{\bullet}{=} x + 1 \qquad \Pi_i^k(x_1, \ldots \overset{\bullet}{,} x_k) = x_i$$

a *unutrašnji čvorovi drveta* (čvorovi koji imaju naslednike) su sledećih oblika:

$$\boxed{f = \mathrm{Sup}_m^k(h; g_1, \ldots, g_m)}$$



Drvo izračunavanja

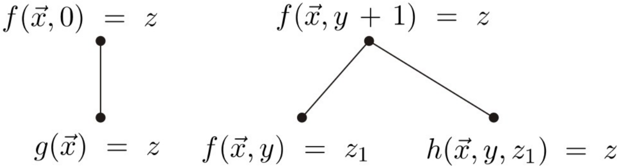
Uspešno izračunavanje vrednosti $f(\vec{x})$ može se prikazati i u obliku tzv. **drveta izračunavanja** čiji su čvorovi označeni odgovarajućim jednakostima, pri čemu je *koren drveta* jednakost $f(\vec{x}) = z$, za neko $z \in \mathbb{N}$, *listovi drveta* (čvorovi bez naslednika) su oblika:

$$\mathbf{0}(x) \overset{\bullet}{=} 0 \qquad s(x) \overset{\bullet}{=} x+1 \qquad \Pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) \overset{\bullet}{=} x_i$$

a *unutrašnji čvorovi drveta* (čvorovi koji imaju naslednike) su sledećih oblika:

...

$$\boxed{f \;=\; \mathrm{Rec}^{k+1}(g,h)}$$



Drvo izračunavanja

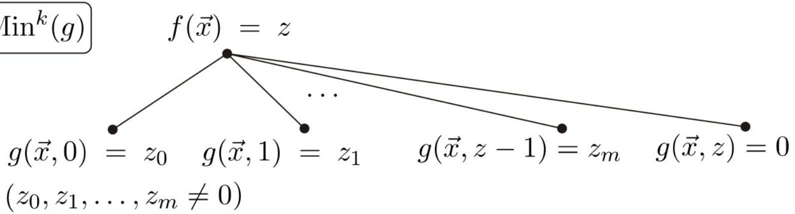
Uspešno izračunavanje vrednosti $f(\vec{x})$ može se prikazati i u obliku tzv. **drveta izračunavanja** čiji su čvorovi označeni odgovarajućim jednakostima, pri čemu je *koren drveta* jednakost $f(\vec{x}) = z$, za neko $z \in \mathbb{N}$, *listovi drveta* (čvorovi bez naslednika) su oblika:

$$\mathbf{0}(x) = 0 \qquad s(x) = x + 1 \qquad \Pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i$$

a *unutrašnji čvorovi drveta* (čvorovi koji imaju naslednike) su sledećih oblika:

...

$$\boxed{f \;=\; \mathrm{Min}^k(g)}$$

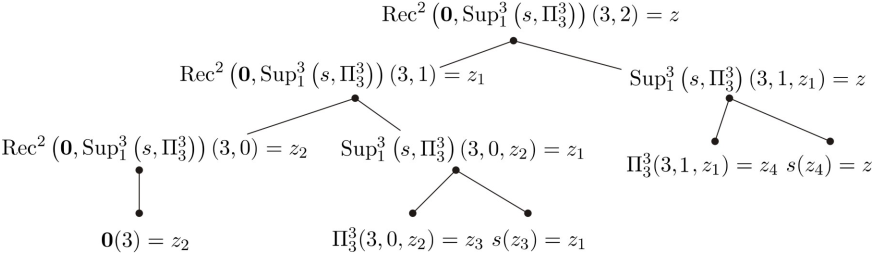


Primer

Konstruisati drvo izračunavanja za $\mathrm{Rec}^2\left(\mathbf{0}, \mathrm{Sup}_1^3\left(s, \Pi_3^3\right)\right)(3,2)$.

Primer

Konstruisati drvo izračunavanja za $\mathrm{Rec}^2\left(\mathbf{0}, \mathrm{Sup}_1^3\left(s, \Pi_3^3\right)\right)(3,2)$.



Primer

Konstruisati drvo izračunavanja za $\mathrm{Rec}^2\left(\mathbf{0}, \mathrm{Sup}_1^3\left(s, \Pi_3^3\right)\right)(3,2)$.