

Tjuringove mašine

N. Ikodinović

ikodinovic@matf.bg.ac.rs

February 26, 2018

Pregled predavanja

- 1 (Ne)formalni opis Tjuringovih mašina
- 2 Primeri Tjuringovih mašina
- 3 TM-izračunljivost i TM-odlučivost

Pregled predavanja

- 1 (Ne)formalni opis Tjuringovih mašina
- 2 Primeri Tjuringovih mašina
- 3 TM-izračunljivost i TM-odlučivost

Tjuringova mašina



$\Gamma = \{s_1, \dots, s_m\}$ – alfabet trake; $\sqcup \in \Gamma$ – blanko znak.

Tjuringova mašina



$\Gamma = \{s_1, \dots, s_m\}$ – alfabet trake; $\sqcup \in \Gamma$ – blanko znak.

Tjuringov program je konačan niza instrukcija označenih $q_0, q_1, \dots, q_k$, pri čemu je svaka oblika ($D_\ell \in \{L, R, P\}$):

$$\begin{array}{c|l}
 q_i & s_1 s'_1 D_1 q_{j_1} \\
 & \vdots \\
 & s_m s'_m D_m q_{j_m}
 \end{array}$$

ili

q_i STOP

Tjuringova mašina

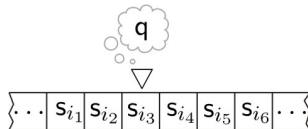


$\Gamma = \{s_1, \dots, s_m\}$ – alfabet trake; $\sqcup \in \Gamma$ – blanko znak.

Tjuringov program je konačan niza instrukcija označenih $q_0, q_1, \dots, q_k$, pri čemu je svaka oblika ($D_\ell \in \{L, R, P\}$):

$$\begin{array}{l|l}
 q_i & s_1 s'_1 D_1 q_{j_1} \\
 & \vdots \\
 & s_m s'_m D_m q_{j_m}
 \end{array}$$

ili

$$q_i \quad \text{STOP}$$


Značenje instrukcija

$$q_i \left| \begin{array}{l} s_1 s'_1 D_1 q_{j_1} \\ \vdots \\ s_m s'_m D_m q_{j_m} \end{array} \right. \quad \text{ili} \quad q_i s_1 s'_1 D_1 q_{j_1}, \dots, q_i s_m s'_m D_m q_{j_m}$$

ZNAČENJE: Ako je s_ℓ simbol koji čitaš, obriši ga i upiši s'_ℓ , pomeri se na levo (ako je D_ℓ jednako L), odn. desno (ako je D_ℓ jednako R) susedno polje ili ostani na istom polju (ako je D_ℓ jednako P) i predji na izvršavanje instrukcije q_{j_ℓ} ($s_\ell, s'_\ell \in \Gamma$, $1 \leq \ell \leq m$, $0 \leq j_1, \dots, j_m \leq k$).

Značenje instrukcija

$$q_i \left| \begin{array}{c} s_1 s'_1 D_1 q_{j_1} \\ \vdots \\ s_m s'_m D_m q_{j_m} \end{array} \right. \quad \text{ili} \quad q_i s_1 s'_1 D_1 q_{j_1}, \dots, q_i s_m s'_m D_m q_{j_m}$$

ZNAČENJE: Ako je s_ℓ simbol koji čitaš, obriši ga i upiši s'_ℓ , pomeri se na levo (ako je D_ℓ jednako L), odn. desno (ako je D_ℓ jednako R) susedno polje ili ostani na istom polju (ako je D_ℓ jednako P) i predji na izvršavanje instrukcije q_{j_ℓ} ($s_\ell, s'_\ell \in \Gamma$, $1 \leq \ell \leq m$, $0 \leq j_1, \dots, j_m \leq k$).

q_i **STOP**

ZNAČENJE: Prekini sa radom.

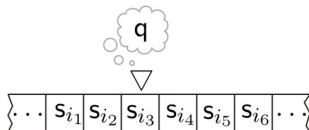
Stanja i konfiguracije

Oznaku instrukcije nazivamo i **stanjem**, pri čemu oznaku one kojom treba započeti izvršavanje programa (najčešće q_0) izdvajamo kao **početno stanje**. Oznake svih STOP instrukcija nazivamo **završnim stanjima**.

Stanja i konfiguracije

Oznaku instrukcije nazivamo i **stanjem**, pri čemu oznaku one kojom treba započeti izvršavanje programa (najčešće q_0) izdvajamo kao **početno stanje**. Oznake svih STOP instrukcija nazivamo **završnim stanjima**.

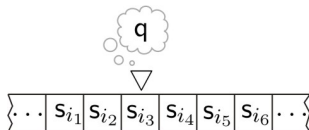
Kada je poznat sadržaj svake ćelije trake, položaj glave i stanje u kojem se ona nalazi kažemo da je poznata **konfiguracija** trake.



Stanja i konfiguracije

Oznaku instrukcije nazivamo i **stanjem**, pri čemu oznaku one kojom treba započeti izvršavanje programa (najčešće q_0) izdvajamo kao **početno stanje**. Oznake svih STOP instrukcija nazivamo **završnim stanjima**.

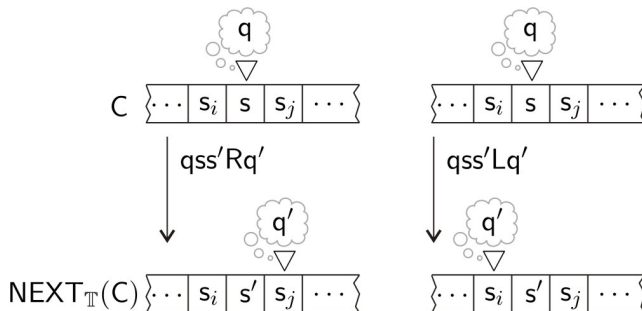
Kada je poznat sadržaj svake ćelije trake, položaj glave i stanje u kojem se ona nalazi kažemo da je poznata **konfiguracija** trake.



Završne konfiguracije su one konfiguracije u kojima je glava u nekom završnom stanju.

NEXT_T

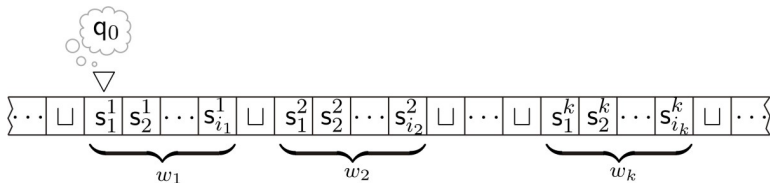
Ukoliko konfiguracija C nije završna, onda je Tjuringovim programom potpuno određena naredna konfiguracija $\text{NEXT}_T(C)$.



Slično za $qss'Pq'$

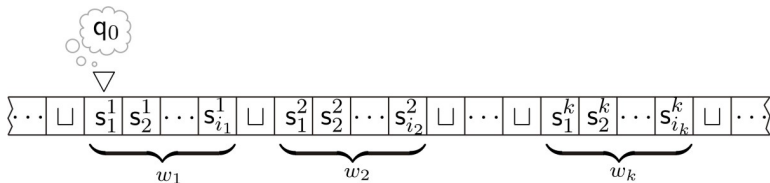
Početne konfiguracije

Izvršavanje Tjuringovih programa posmatramo u situacijama kada je na početku na traci upisano konačno mnogo reči unapred određenog **ulaznog alfabeta** $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\sqcup\}$ (Σ ne sadrži blanko znak!)



Početne konfiguracije

Izvršavanje Tjuringovih programa posmatramo u situacijama kada je na početku na traci upisano konačno mnogo reči unapred određenog **ulaznog alfabeta** $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\sqcup\}$ (Σ ne sadrži blanko znak!)



U slučaju da je w_1 prazna reč, glava u početnom stanju čita prvi sleva blanko znak ispred reči w_2 .

Formalni opis Tjuringove mašine

Definicija

Tjuringova mašina (ili kraće TM) jeste uređena sedmorka

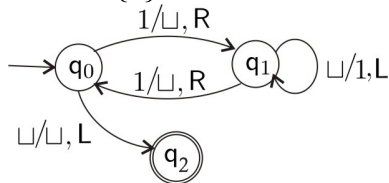
$\mathbb{T} = (Q, q_0, F, \Gamma, \sqcup, \Sigma, \tau)$ pri čemu je:

- Q konačan skup stanja, tj. skup svih instrukcija programa;
- $q_0 \in Q$ je početno stanje, tj. prva instrukcija kojom se započinje izvršavanje programa,
- $F \subseteq Q$ skup završnih stanja, tj. skup STOP-instrukcija,
- Γ je alfabet trake koji sadrži blanko znak $\sqcup$, tj. skup svih simbola koji mogu biti upisivani u ćelije trake,
- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\sqcup\}$ ulazni alfabet, i
- τ je zapravo Tjuringov program; identifikujemo ga sa tzv. funkcijom tranzicije $\tau : (Q \setminus F) \times \Gamma \rightarrow \Gamma \times \{R, L, P\} \times Q$, kojom se opisuju instrukcije koje nisu STOP-instrukcije: ako se uređena petorka $qss'Dq'$ pojavljuje kao deo instrukcije q , onda je $\tau(q, s) = (s', D, q')$.

Primer

Dat je Tjuringov program za ulazni alfabet $\Sigma = \{1\}$:

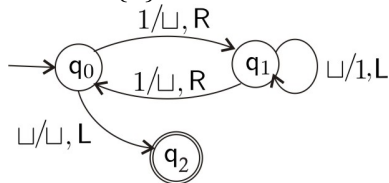
$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



Primer

Dat je Tjuringov program za ulazni alfabet $\Sigma = \{1\}$:

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



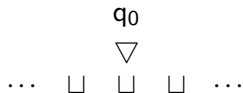
Odgovarajuća Tjuringova mašina:

$\mathbb{T} = (\{q_0, q_1, q_2\}, q_0, \{q_2\}, \{\sqcup, 1\}, \sqcup, \{1\}, \tau)$, gde je
 $\tau : (Q \setminus F) \times \Gamma \rightarrow \Gamma \times \{R, L\} \times Q$ dato tabelom:

τ	$\sqcup$	1
q_0	$(\sqcup, L, q_2)$	$(\sqcup, R, q_1)$
q_1	$(1, L, q_1)$	$(\sqcup, R, q_0)$

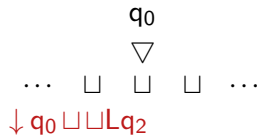
Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



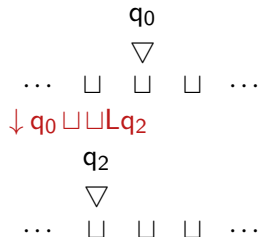
Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



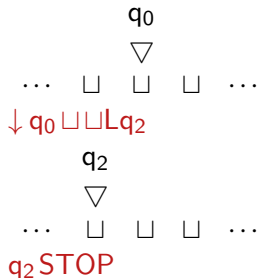
Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$

q_0
 ∇
 $\dots \sqcup \sqcup \sqcup 1 \sqcup \dots$

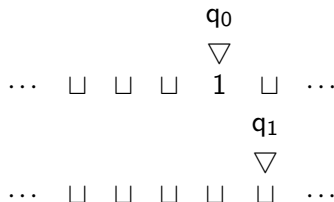
Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & q_0 & & \\
 & & & & \nabla & & \\
 \dots & \sqcup & \sqcup & \sqcup & 1 & \sqcup & \dots
 \end{array}$$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$

Primer

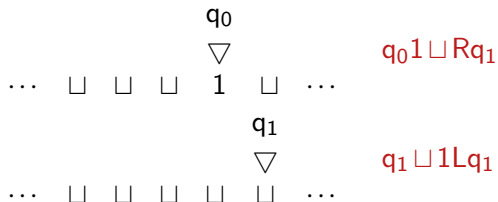
$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



$q_0 1 \sqcup R q_1$

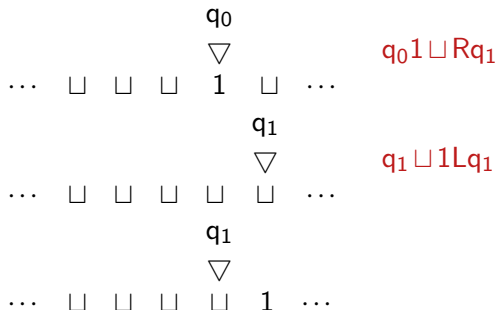
Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



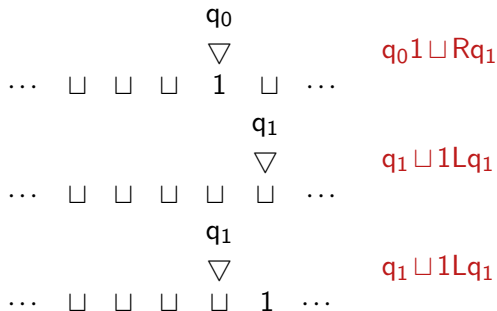
Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



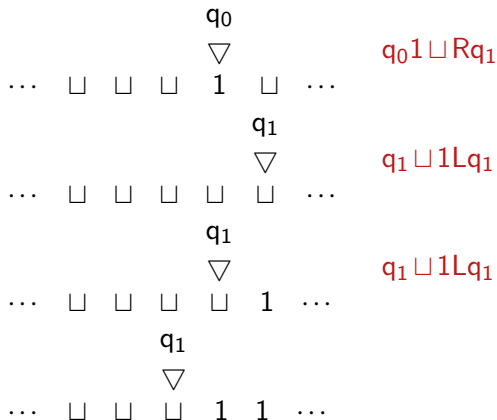
Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



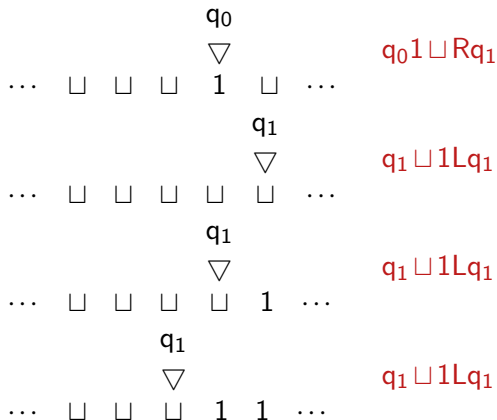
Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



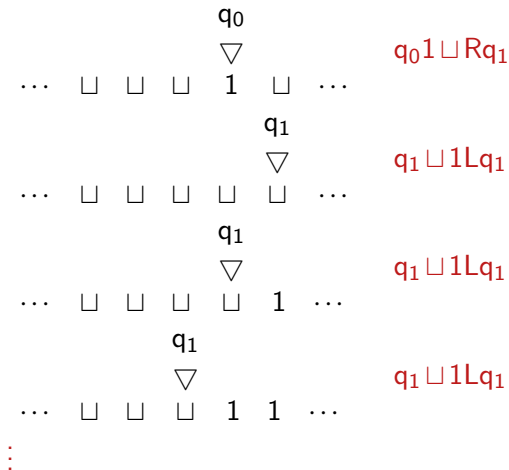
Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$

q_0
 ∇
 $\dots \sqcup 1 \quad 1 \sqcup \dots$

Primer

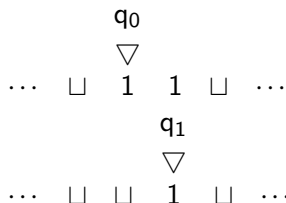
$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & q_0 & & & & \\
 & & \nabla & & & & \\
 \dots & \sqcup & 1 & 1 & \sqcup & \dots &
 \end{array}$$

$q_0 1 \sqcup R q_1$

Primer

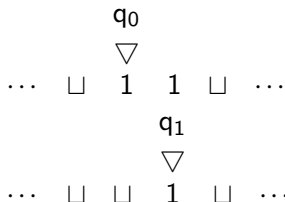
$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



$q_0 1 \sqcup R q_1$

Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



$q_0 1 \sqcup R q_1$

$q_1 1 \sqcup R q_0$

Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$

q_0
 ∇
 $\dots \sqcup 1 \quad 1 \sqcup \dots$

$q_0 1 \sqcup R q_1$

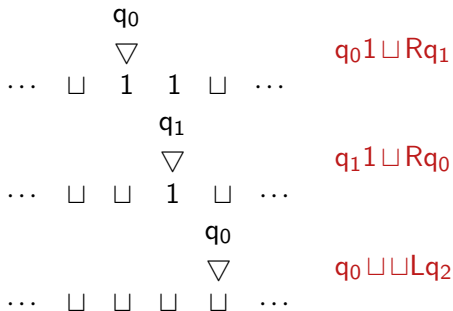
q_1
 ∇
 $\dots \sqcup \sqcup 1 \sqcup \dots$

$q_1 1 \sqcup R q_0$

q_0
 ∇
 $\dots \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \dots$

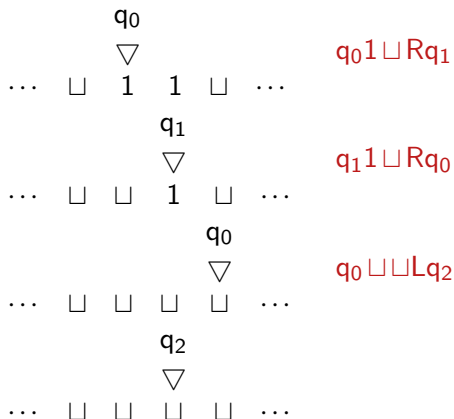
Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



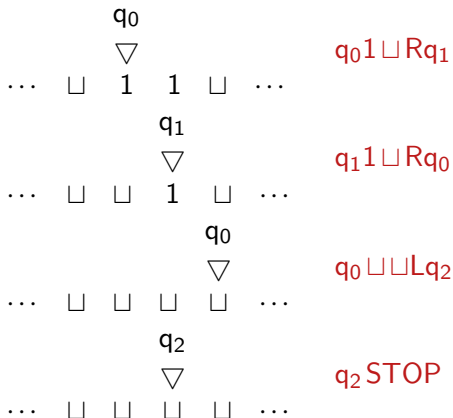
Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



Primer

$q_0 \sqcup \sqcup L q_2$ $q_1 \sqcup 1 L q_1$ $q_2 \text{ STOP}$
 $q_0 1 \sqcup R q_1$ $q_1 1 \sqcup R q_0$



Izračunavanje

Svaka Tjuringova mašina $\mathbb{T} = (Q, q_0, F, \Gamma, \sqcup, \Sigma, \tau)$ za bilo koji ulaz $\bar{w} = (w_1, \dots, w_k) \in \Sigma^{*k} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\Sigma^* \times \dots \times \Sigma^*}_{k \text{ puta}}$, tj. odgovarajuću početnu konfiguraciju $C_{\bar{w}}$, generiše niz konfiguracija:

$$C_{\bar{w}} \rightarrow \text{NEXT}_{\mathbb{T}}(C_{\bar{w}}) \rightarrow \text{NEXT}_{\mathbb{T}}(\text{NEXT}_{\mathbb{T}}(C_{\bar{w}})) \rightarrow \dots$$

koji je:

- *konačan* ako se u nizu pojavi završna konfiguracija; tada pišemo $\mathbb{T}(\bar{w}) \downarrow$ i kažemo $\mathbb{T}$ *se zaustavlja (konverigra) za ulaz $\bar{w}$* ; ili
- *beskonačan* ako se u nizu nikada ne pojavljuje završna konfiguracija; tada pišemo $\mathbb{T}(\bar{w}) \uparrow$ i kažemo $\mathbb{T}$ *se ne zaustavlja (divergira) za ulaz $\bar{w}$* .

Izračunavanje

Ako $\mathbb{T}(\overline{w}) \downarrow$, konačan niz konfiguracija $C_{\overline{w}}, C_1, \dots, C_d$, gde je:

- $C_{\overline{w}}$ početna konfiguracija određena ulazom $\overline{w}$,
- $C_{i+1} = \text{NEXT}_{\mathbb{P}}(C_i)$, $1 \leq i < d$; par susednih konfiguracija nazivamo *računskim korakom*; i
- C_d završna konfiguracija,

nazivamo **izračunavanjem** mašine $\mathbb{T}$ za ulaz $\overline{w}$ i pišemo $C_{\overline{w}} \rightarrow_{\mathbb{T}}^* C_d$.

Izračunavanje

Ako $\mathbb{T}(\overline{w}) \downarrow$, konačan niz konfiguracija $C_{\overline{w}}, C_1, \dots, C_d$, gde je:

- $C_{\overline{w}}$ početna konfiguracija određena ulazom $\overline{w}$,
- $C_{i+1} = \text{NEXT}_{\mathbb{P}}(C_i)$, $1 \leq i < d$; par susednih konfiguracija nazivamo *računskim korakom*; i
- C_d završna konfiguracija,

nazivamo **izračunavanjem** mašine $\mathbb{T}$ za ulaz $\overline{w}$ i pišemo $C_{\overline{w}} \rightarrow_{\mathbb{T}}^* C_d$.

Ako $\mathbb{T}(\overline{w}) \uparrow$, tj. niz konfiguracija je beskonačan, izračunavanje mašine $\mathbb{T}$ se ne zaustavlja za ulaz $\overline{w}$ i pišemo $C_{\overline{w}} \rightarrow_{\mathbb{T}}^* \infty$.

Izračunavanje

Ako $\mathbb{T}(\overline{w}) \downarrow$, konačan niz konfiguracija $C_{\overline{w}}, C_1, \dots, C_d$, gde je:

- $C_{\overline{w}}$ početna konfiguracija određena ulazom $\overline{w}$,
- $C_{i+1} = \text{NEXT}_{\mathbb{P}}(C_i)$, $1 \leq i < d$; par susednih konfiguracija nazivamo *računskim korakom*; i
- C_d završna konfiguracija,

nazivamo **izračunavanjem** mašine $\mathbb{T}$ za ulaz $\overline{w}$ i pišemo $C_{\overline{w}} \rightarrow_{\mathbb{T}}^* C_d$.

Ako $\mathbb{T}(\overline{w}) \uparrow$, tj. niz konfiguracija je beskonačan, izračunavanje mašine $\mathbb{T}$ se ne zaustavlja za ulaz $\overline{w}$ i pišemo $C_{\overline{w}} \rightarrow_{\mathbb{T}}^* \infty$.

Konfiguracije kraće označavamo kao reči jezika $\Gamma^* Q \Gamma^+$, tj. u obliku $w_L q w_D$, $w_L \in \Gamma^*$, $w_D \in \Gamma^+$:

$$\begin{array}{c}
 q \\
 \nabla \\
 \dots \sqcup \sqcup \underbrace{s_{\ell_m} \dots s_{\ell_2} s_{\ell_1}}_{w_L} s_{d_1} \underbrace{s_{d_2} \dots s_{d_k}}_{w_D} \sqcup \sqcup \dots \\
 \boxed{w_L q w_D}
 \end{array}$$

NEXT_T

Za proizvoljnu TM $T = (Q, q_0, F, \Gamma, \sqcup, \Sigma, \tau)$,

$\text{NEXT}_T : \Gamma^*(Q \setminus F)\Gamma^+ \rightarrow \Gamma^*Q\Gamma^+$ definišemo na sledeći način:

$$\text{NEXT}_T(w_L q s w_D) = \begin{cases} w_L s' q' w_D, & \text{ako je } \tau(q, s) = (s', R, q') \text{ i } w_D \neq \varepsilon, \\ w_L s' q' \sqcup, & \text{ako je } \tau(q, s) = (s', R, q') \text{ i } w_D = \varepsilon, \\ w q' s_i s' w_D, & \text{ako je } \tau(q, s) = (s', L, q') \text{ i } w_L = w s_i, \\ q' \sqcup s' w_D, & \text{ako je } \tau(q, s) = (s', L, q') \text{ i } w_L = \varepsilon, \\ w_L q' s' w_D, & \text{ako je } \tau(q, s) = (s', P, q'). \end{cases}$$

Pregled predavanja

- 1 (Ne)formalni opis Tjuringovih mašina
- 2 Primeri Tjuringovih mašina
- 3 TM-izračunljivost i TM-odlučivost

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

 $q_0 1 1$

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

$$q_0 11 \rightarrow q_1 1$$

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

$$q_0 11 \rightarrow q_1 1 \rightarrow q_0 \sqcup$$

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

$$q_0 11 \rightarrow q_1 1 \rightarrow q_0 \sqcup \rightarrow q_2 \sqcup$$

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

$$q_0 11 \rightarrow q_1 1 \rightarrow q_0 \sqcup \rightarrow q_2 \sqcup$$

$$q_0 11 \rightarrow^* q_2 \sqcup; \quad T(11) \downarrow$$

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

$$q_0 11 \rightarrow q_1 1 \rightarrow q_0 \sqcup \rightarrow q_2 \sqcup$$

$$q_0 11 \rightarrow^* q_2 \sqcup; \quad T(11) \downarrow$$

$$q_0 1$$

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

$$q_0 11 \rightarrow q_1 1 \rightarrow q_0 \sqcup \rightarrow q_2 \sqcup$$

$$q_0 11 \rightarrow^* q_2 \sqcup; \quad T(11) \downarrow$$

$$q_0 1 \rightarrow q_1 \sqcup$$

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

$$q_0 11 \rightarrow q_1 1 \rightarrow q_0 \sqcup \rightarrow q_2 \sqcup$$

$$q_0 11 \rightarrow^* q_2 \sqcup; \quad T(11) \downarrow$$

$$q_0 1 \rightarrow q_1 \sqcup \rightarrow q_1 \sqcup 1$$

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

$$q_0 11 \rightarrow q_1 1 \rightarrow q_0 \sqcup \rightarrow q_2 \sqcup$$

$$q_0 11 \rightarrow^* q_2 \sqcup; \quad T(11) \downarrow$$

$$q_0 1 \rightarrow q_1 \sqcup \rightarrow q_1 \sqcup 1 \rightarrow q_1 \sqcup 11$$

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

$$q_0 11 \rightarrow q_1 1 \rightarrow q_0 \sqcup \rightarrow q_2 \sqcup$$

$$q_0 11 \rightarrow^* q_2 \sqcup; \quad T(11) \downarrow$$

$$q_0 1 \rightarrow q_1 \sqcup \rightarrow q_1 \sqcup 1 \rightarrow q_1 \sqcup 11 \rightarrow q_1 \sqcup 111$$

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

$$q_0 11 \rightarrow q_1 1 \rightarrow q_0 \sqcup \rightarrow q_2 \sqcup$$

$$q_0 11 \rightarrow^* q_2 \sqcup; \quad T(11) \downarrow$$

$$q_0 1 \rightarrow q_1 \sqcup \rightarrow q_1 \sqcup 1 \rightarrow q_1 \sqcup 11 \rightarrow q_1 \sqcup 111 \rightarrow \dots$$

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

$$q_0 11 \rightarrow q_1 1 \rightarrow q_0 \sqcup \rightarrow q_2 \sqcup$$

$$q_0 11 \rightarrow^* q_2 \sqcup; \quad T(11) \downarrow$$

$$q_0 1 \rightarrow q_1 \sqcup \rightarrow q_1 \sqcup 1 \rightarrow q_1 \sqcup 11 \rightarrow q_1 \sqcup 111 \rightarrow \dots$$

$$T(1) \uparrow$$

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

$$q_0 11 \rightarrow q_1 1 \rightarrow q_0 \sqcup \rightarrow q_2 \sqcup$$

$$q_0 11 \rightarrow^* q_2 \sqcup; \quad T(11) \downarrow$$

$$q_0 1 \rightarrow q_1 \sqcup \rightarrow q_1 \sqcup 1 \rightarrow q_1 \sqcup 11 \rightarrow q_1 \sqcup 111 \rightarrow \dots$$

$$T(1) \uparrow$$

$$q_0 1^n \rightarrow^*$$

Primer 1.

$$\begin{array}{ll} q_0 \sqcup \sqcup L q_2 & q_0 1 \sqcup R q_1 \\ q_1 \sqcup 1 L q_1 & q_1 1 \sqcup R q_0 \end{array}$$

$$q_0 11 \rightarrow q_1 1 \rightarrow q_0 \sqcup \rightarrow q_2 \sqcup$$

$$q_0 11 \rightarrow^* q_2 \sqcup; \quad T(11) \downarrow$$

$$q_0 1 \rightarrow q_1 \sqcup \rightarrow q_1 \sqcup 1 \rightarrow q_1 \sqcup 11 \rightarrow q_1 \sqcup 111 \rightarrow \dots$$

$$T(1) \uparrow$$

$$q_0 1^n \rightarrow^* \begin{cases} q_2 \sqcup, & \text{ako je } n \text{ paran;} \\ \infty, & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

Primer 2.

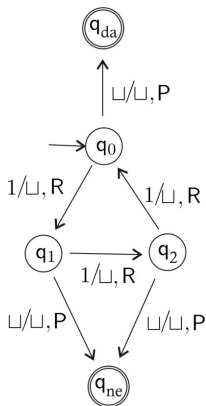
Posmatrajmo Turingovu mašinu

$$\mathbb{T} = (\{q_0, q_1, q_2, q_{da}, q_{ne}\}, q_0, \{q_{da}, q_{ne}\}, \{1\}, \sqcup, \{0, 1, \sqcup\}, \tau)$$

pri čemu je τ određeno sledećim naredbama:

$$\begin{array}{lll} q_0 \sqcup \sqcup P q_{da} & q_1 \sqcup \sqcup P q_{ne} & q_2 \sqcup \sqcup P q_{ne} \\ q_0 1 1 R q_1 & q_1 1 1 R q_2 & q_2 1 1 R q_0 \end{array}$$

za ulazni alfabet $\Sigma = \{1\}$.



Primer 2.

Posmatrajmo Turingovu mašinu

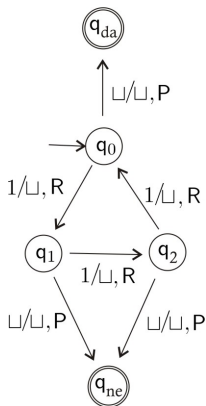
$$\mathbb{T} = (\{q_0, q_1, q_2, q_{da}, q_{ne}\}, q_0, \{q_{da}, q_{ne}\}, \{1\}, \sqcup, \{0, 1, \sqcup\}, \tau)$$

pri čemu je τ određeno sledećim naredbama:

$$\begin{array}{lll} q_0 \sqcup \sqcup P q_{da} & q_1 \sqcup \sqcup P q_{ne} & q_2 \sqcup \sqcup P q_{ne} \\ q_0 1 1 R q_1 & q_1 1 1 R q_2 & q_2 1 1 R q_0 \end{array}$$

za ulazni alfabet $\Sigma = \{1\}$.

$$q_0 1^n \xrightarrow{*}$$



Primer 2.

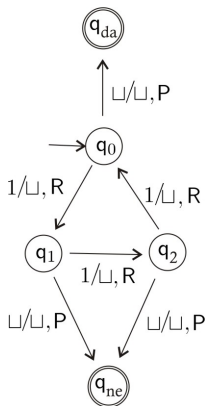
Posmatrajmo Turingovu mašinu

$$\mathbb{T} = (\{q_0, q_1, q_2, q_{da}, q_{ne}\}, q_0, \{q_{da}, q_{ne}\}, \{1\}, \sqcup, \{0, 1, \sqcup\}, \tau)$$

pri čemu je τ određeno sledećim naredbama:

$$\begin{array}{lll} q_0 \sqcup \sqcup P q_{da} & q_1 \sqcup \sqcup P q_{ne} & q_2 \sqcup \sqcup P q_{ne} \\ q_0 1 1 R q_1 & q_1 1 1 R q_2 & q_2 1 1 R q_0 \end{array}$$

za ulazni alfabet $\Sigma = \{1\}$.



$$q_0 1^n \xrightarrow{*} \begin{cases} q_{da} \sqcup, & 3 \mid n \\ q_{ne} \sqcup, & 3 \nmid n. \end{cases}$$

Primer 2.

Posmatrajmo Turingovu mašinu

$$\mathbb{T} = (\{q_0, q_1, q_2, q_{da}, q_{ne}\}, q_0, \{q_{da}, q_{ne}\}, \{1\}, \sqcup, \{0, 1, \sqcup\}, \tau)$$

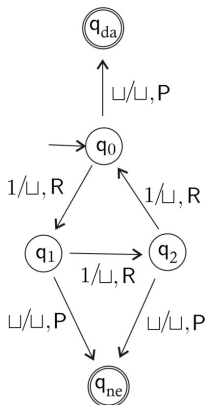
pri čemu je τ određeno sledećim naredbama:

$$\begin{array}{lll} q_0 \sqcup \sqcup P q_{da} & q_1 \sqcup \sqcup P q_{ne} & q_2 \sqcup \sqcup P q_{ne} \\ q_0 1 1 R q_1 & q_1 1 1 R q_2 & q_2 1 1 R q_0 \end{array}$$

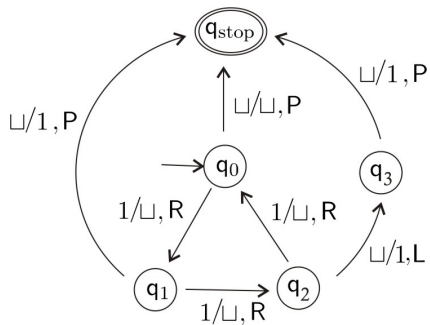
za ulazni alfabet $\Sigma = \{1\}$.

$$q_0 1^n \xrightarrow{*} \begin{cases} q_{da} \sqcup, & 3 \mid n \\ q_{ne} \sqcup, & 3 \nmid n. \end{cases}$$

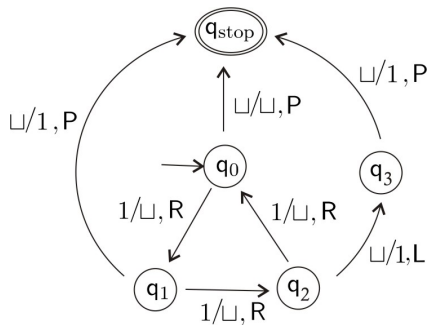
Konstruisana mašina *odlučuje*, odn. *rešava problem pripadanja* jeziku $L = \{1^n : n \in \mathbb{N}, 3 \mid n\}$ nad alfabetom $\{1\}$.



Primer 3.

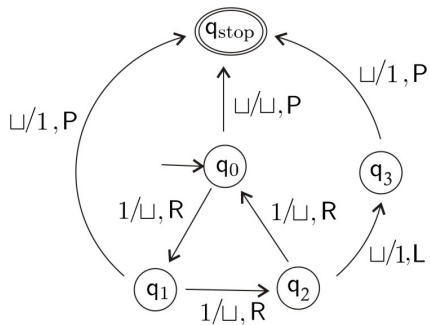


Primer 3.



Nedostaje petorka $q_3 1 \dots$!?

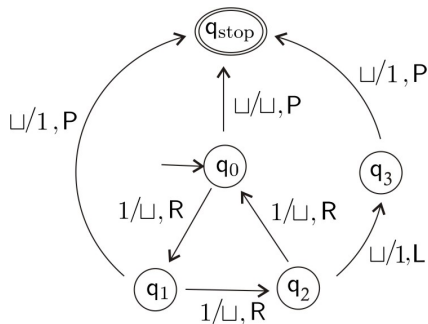
Primer 3.



Nedostaje petorka $q_3 1 \dots$!?

$$q_0 1^n \xrightarrow{*}$$

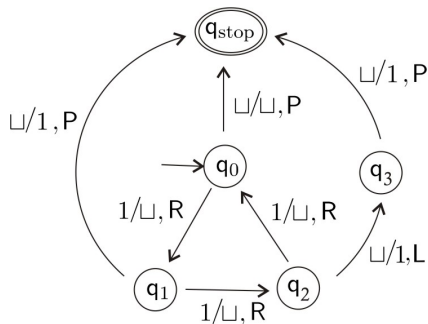
Primer 3.



Nedostaje petorka $q_3 1 \dots$!?

$$q_0 1^n \xrightarrow{*} \begin{cases} q_{\text{stop}} \sqcup, & \text{ostatak pri deljenju } n \text{ sa } 3 \text{ je } 0 \\ q_{\text{stop}} 1, & \text{ostatak pri deljenju } n \text{ sa } 3 \text{ je } 1 \\ q_{\text{stop}} 11, & \text{ostatak pri deljenju } n \text{ sa } 3 \text{ je } 2. \end{cases}$$

Primer 3.



Nedostaje petorka $q_3 1 \dots$!?

$$q_0 1^n \xrightarrow{*} \begin{cases} q_{\text{stop}} \sqcup, & \text{ostatak pri deljenju } n \text{ sa } 3 \text{ je } 0 \\ q_{\text{stop}} 1, & \text{ostatak pri deljenju } n \text{ sa } 3 \text{ je } 1 \\ q_{\text{stop}} 11, & \text{ostatak pri deljenju } n \text{ sa } 3 \text{ je } 2. \end{cases}$$

Mašina *izračunava* funkciju $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, datu sa $f(1^n) = 1^{\text{rm}(3,n)}$, gde je $\text{rm}(3,n)$ ostatak pri deljenju n sa 3.

Zadatak 1

Konstruišimo Tjuringovu mašinu koja za dve reči alfabetu $\{a, b\}$ na prvu od njih nadovezuje drugu i zaustavlja se.

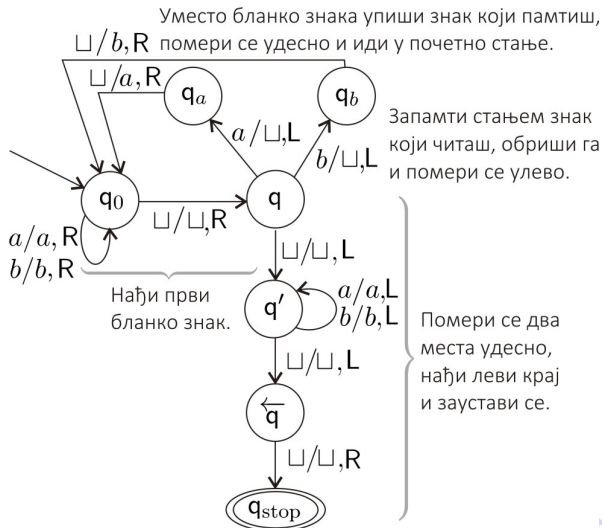
Zadatak 1

Konstruišimo Tjuringovu mašinu koja za dve reči alfabetu $\{a, b\}$ na prvu od njih nadovezuje drugu i zaustavlja se.

Preciznija formulacija zadatka jeste: konstruisati Tjuringovu mašinu $\mathbb{T}$, čiji je ulazni alfabet $\{a, b\}$ i završno stanje q_{stop} , takvu da za sve $w_1, w_2 \in \{a, b\}^*$ važi: $q_0 w_1 \sqcup w_2 \rightarrow_{\mathbb{T}}^* q_{\text{stop}} w_1 w_2$.

Rešenje zadatka 1

Za sve $w_1, w_2 \in \{a, b\}^*$ važi: $q_0 w_1 \sqcup w_2 \xrightarrow{*} q_{\text{stop}} w_1 w_2$.



Zadatak 2

Konstruisati Tjuringovu mašinu $\mathbb{T}$ takvu da za $m, n \in \mathbb{N}$,
 $q_0 1^m \sqcup 1^n \rightarrow_{\mathbb{T}}^* q_{\text{stop}} 1^{m+3n}$.

Zadatak 2

Konstruisati Tjuringovu mašinu $\mathbb{T}$ takvu da za $m, n \in \mathbb{N}$,
 $q_0 1^m \sqcup 1^n \rightarrow_{\mathbb{T}}^* q_{\text{stop}} 1^{m+3n}$.

Traženu mašinu dobijamo **nadovezivanjem**:

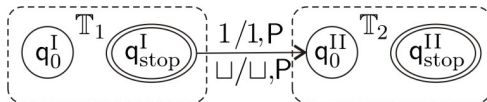
- mašine $\mathbb{T}_I$ koja nadovezuje reči alfabeta $\{1\}$: $q_0^I 1^m \sqcup 1^n \rightarrow_{\mathbb{T}_I}^* q_{\text{stop}}^I 1^{m+n}$
- mašine $\mathbb{T}_{II}$ koja računa ostatak pri deljenju sa 3:
 $q_0^{II} 1^n \rightarrow_{\mathbb{T}_2}^* q_{\text{stop}}^{II} 1^{r_{m(3,n)}}$.

Zadatak 2

Konstruisati Tjuringovu mašinu $\mathbb{T}$ takvu da za $m, n \in \mathbb{N}$,
 $q_0 1^m \sqcup 1^n \rightarrow_{\mathbb{T}}^* q_{\text{stop}} 1^{m+3n}$.

Traženu mašinu dobijamo **nadovezivanjem**:

- mašine $\mathbb{T}_I$ koja nadovezuje reči alfabeta $\{1\}$: $q_0^I 1^m \sqcup 1^n \rightarrow_{\mathbb{T}_I}^* q_{\text{stop}}^I 1^{m+n}$
- mašine $\mathbb{T}_{II}$ koja računa ostatak pri deljenju sa 3:
 $q_0^{II} 1^n \rightarrow_{\mathbb{T}_2}^* q_{\text{stop}}^{II} 1^{rn(3,n)}$.



Nadovezivanje Tjuringovih mašina

Nadovezivanjem Tjuringovih mašina

$$\mathbb{T}_1 = (Q_I, q_0^I, F_I, \Sigma_I, \sqcup, \Gamma_I, \tau_I) \text{ i } \mathbb{T}_2 = (Q_{II}, q_0^{II}, F_{II}, \Sigma_{II}, \sqcup, \Gamma_{II}, \tau_{II}),$$

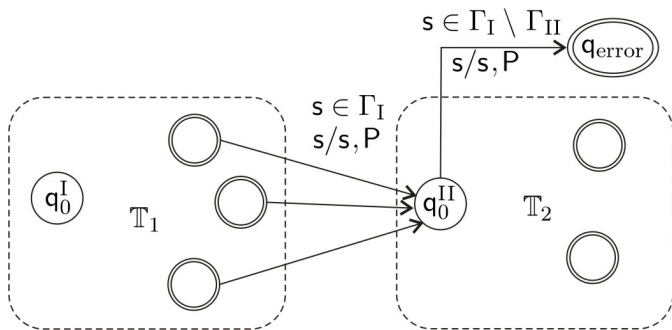
gradimo novu mašinu $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \mathbb{T}_2$, čija se izračunavanja dobijaju tako što se na izračunavanje mašine $\mathbb{T}_1$ nadovezuje izračunavanje mašine $\mathbb{T}_2$.

Nadovezivanje Tjuringovih mašina

Nadovezivanjem Tjuringovih mašina

$$\mathbb{T}_1 = (Q_I, q_0^I, F_I, \Sigma_I, \sqcup, \Gamma_I, \tau_I) \text{ i } \mathbb{T}_2 = (Q_{II}, q_0^{II}, F_{II}, \Sigma_{II}, \sqcup, \Gamma_{II}, \tau_{II}),$$

gradimo novu mašinu $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \mathbb{T}_2$, čija se izračunavanja dobijaju tako što se na izračunavanje mašine $\mathbb{T}_1$ nadovezuje izračunavanje mašine $\mathbb{T}_2$.



Pregled predavanja

- 1 (Ne)formalni opis Tjuringovih mašina
- 2 Primeri Tjuringovih mašina
- 3 TM-izračunljivost i TM-odlučivost

TM-izračunljivost i TM-odlučivost

Definicija

1) Jezik $L \subseteq \Sigma^{*k}$ je **TM-odlučiv** ako postoji Tjuringova mašina $\mathbb{T}$ sa ulaznim alfabetom Σ takva da za sve reči $w_1, \dots, w_k \in \Sigma^*$:

$$q_0 w_1 \sqcup \dots \sqcup w_k \xrightarrow{*} \mathbb{T} \begin{cases} q_{\text{da}} \sqcup, & (w_1, \dots, w_k) \in L \\ q_{\text{ne}} \sqcup, & (w_1, \dots, w_k) \notin L. \end{cases}$$

TM-izračunljivost i TM-odlučivost

Definicija

1) Jezik $L \subseteq \Sigma^{*k}$ je **TM-odlučiv** ako postoji Tjuringova mašina $\mathbb{T}$ sa ulaznim alfabetom Σ takva da za sve reči $w_1, \dots, w_k \in \Sigma^*$:

$$q_0 w_1 \sqcup \dots \sqcup w_k \rightarrow_{\mathbb{T}}^* \begin{cases} q_{\text{da}} \sqcup, & (w_1, \dots, w_k) \in L \\ q_{\text{ne}} \sqcup, & (w_1, \dots, w_k) \notin L. \end{cases}$$

2) Funkcija $f : \Sigma^{*k} \rightarrow \Gamma^*$ je **TM-izračunljiva** ako postoji Tjuringova mašina $\mathbb{T}$ sa ulaznim alfabetom Σ takva da za sve reči $w_1, \dots, w_k \in \Sigma^*$:

$$q_0 w_1 \sqcup \dots \sqcup w_k \rightarrow_{\mathbb{T}}^* q_{\text{stop}} f((w_1, \dots, w_k)).$$

Važna napomena

U narednim poglavljima, često ćemo konstruisati TM podrazumevajući da one kao ulaze dobijaju samo elemente nekog TM-odlučivog skupa $L \subseteq \Sigma^{*k}$, tj. vodeći računa samo o ulazima iz L , i zanemarujući ulaze koji ne pripadaju L . U takvim slučajevima mi zapravo konstruišemo deo $\mathbb{T}$ mašine prikazane na slici desno, podrazumevajući da je taj deo nadovezan na stanje q_{da} mašine $\mathbb{T}_L$ koja odlučuje L .

