Aritmetika

N. Ikodinović

ikodinovic@matf.bg.ac.rs

February 26, 2018

Pregled predavanja

1. Princip rekurzije
2. Kodirajuće funkcije
3. Dijagonalizacija
4. Alfabet, reč, jezik

Pregled predavanja

Princip rekurzije

Princip rekurzije

Neka $g : P \to X$ i $h : S \times X \to X$. Tada postoji jedinstvena funkcija $f : P \times \mathbb{N} \to X$ takva da za svako $p \in P$:

$$
\text{(Rec)} \left| \begin{array}{l} f(p,0) = g(p), \\ f(p,s(n)) = h(p,f(p,n)),\ n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.
$$

Princip rekurzije

Princip rekurzije

Neka $g : P \to X$ i $h : S \times X \to X$. Tada postoji jedinstvena funkcija $f : P \times \mathbb{N} \to X$ takva da za svako $p \in P$:

$$\text{(Rec)}\left|\begin{array}{l} f(p,0) = g(p), \\ f(p,s(n)) = h(p,f(p,n)),\ n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

Sabiranje. $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(S = X = \mathbb{N})$

Princip rekurzije

Princip rekurzije

Neka $g : P \to X$ i $h : S \times X \to X$. Tada postoji jedinstvena funkcija $f : P \times \mathbb{N} \to X$ takva da za svako $p \in P$:

$$\text{(Rec)} \left| \begin{array}{l} f(p,0) = g(p), \\ f(p,s(n)) = h(p,f(p,n)),\ n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

Sabiranje. $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(S = X = \mathbb{N})$

$$\left| \begin{array}{l} +(m,0) = m, \\ +(m,s(n)) = s(+(m,n)); \end{array} \right.$$

Princip rekurzije

Princip rekurzije

Neka $g : P \to X$ i $h : S \times X \to X$. Tada postoji jedinstvena funkcija $f : P \times \mathbb{N} \to X$ takva da za svako $p \in P$:

$$(\mathrm{Rec}) \left| \begin{array}{l} f(p,0) = g(p), \\ f(p,s(n)) = h(p,f(p,n)),\ n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

Sabiranje. $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(S = X = \mathbb{N})$

$$\left| \begin{array}{l} +(m,0) = m, \\ +(m,s(n)) = s(+(m,n)); \end{array} \right. \quad \text{odnosno} \quad \left| \begin{array}{l} m+0 = m, \\ m+s(n) = s(m+n). \end{array} \right.$$

Princip rekurzije

Princip rekurzije

Neka $g : P \to X$ i $h : S \times X \to X$. Tada postoji jedinstvena funkcija $f : P \times \mathbb{N} \to X$ takva da za svako $p \in P$:

$$\text{(Rec)}\left|\begin{array}{l} f(p,0) = g(p), \\ f(p,s(n)) = h(p,f(p,n)),\ n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

Sabiranje. $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(S = X = \mathbb{N})$

$$\left|\begin{array}{l} +(m,0) = m, \\ +(m,s(n)) = s(+(m,n)); \end{array}\right. \quad \text{odnosno} \quad \left|\begin{array}{l} m+0 = m, \\ m+s(n) = s(m+n). \end{array}\right.$$

Množenje:

Stepenovanje:

Princip rekurzije

Princip rekurzije

Neka $g : P \to X$ i $h : S \times X \to X$. Tada postoji jedinstvena funkcija $f : P \times \mathbb{N} \to X$ takva da za svako $p \in P$:

$$\text{(Rec)}\left|\begin{array}{l} f(p,0) = g(p), \\ f(p,s(n)) = h(p,f(p,n)),\ n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

Sabiranje. $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(S = X = \mathbb{N})$

$$\left|\begin{array}{l} +(m,0) = m, \\ +(m,s(n)) = s(+(m,n)); \end{array}\right. \quad \text{odnosno} \quad \left|\begin{array}{l} m+0 = m, \\ m+s(n) = s(m+n). \end{array}\right.$$

Množenje:

$$\left|\begin{array}{l} m \cdot 0 = 0, \\ m \cdot s(n) = m + (m \cdot n). \end{array}\right.$$

Stepenovanje:

Princip rekurzije

Princip rekurzije

Neka $g : P \to X$ i $h : S \times X \to X$. Tada postoji jedinstvena funkcija $f : P \times \mathbb{N} \to X$ takva da za svako $p \in P$:

$$\text{(Rec)}\left|\begin{array}{l} f(p,0) = g(p), \\ f(p,s(n)) = h(p,f(p,n)),\ n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

Sabiranje. $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(S = X = \mathbb{N})$

$$\left|\begin{array}{l} +(m,0) = m, \\ +(m,s(n)) = s(+(m,n)); \end{array}\right. \quad \text{odnosno} \quad \left|\begin{array}{l} m+0 = m, \\ m+s(n) = s(m+n). \end{array}\right.$$

Množenje:

$$\left|\begin{array}{l} m \cdot 0 = 0, \\ m \cdot s(n) = m + (m \cdot n). \end{array}\right.$$

Stepenovanje:

$$\left|\begin{array}{l} m^0 = 1, \\ m^{s(n)} = m \cdot m^n. \end{array}\right.$$

Količnik i ostatak

Uredjenje: $m \leqslant n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N}\,(m + k = n)$
Deljivost: $m \mid n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N}\,(m \cdot k = n)$

Količnik i ostatak

Uredjenje: $m \leqslant n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N}\,(m+k=n)$
Deljivost: $m \mid n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N}\,(m \cdot k = n)$

Teorema o ostatku

Za sve n i $m > 0$ postoje jedinstveni (količnik) q i (ostatak) r takvi da je $n = qm + r$, $0 \leqslant r < m$.

Količnik i ostatak

Uredjenje: $m \leqslant n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N}\,(m + k = n)$
Deljivost: $m \mid n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N}\,(m \cdot k = n)$

Teorema o ostatku

Za sve n i $m > 0$ postoje jedinstveni (količnik) q i (ostatak) r takvi da je $n = qm + r$, $0 \leqslant r < m$.

$$\mathrm{qt}(m,n) = \begin{cases} \text{količnik pri deljenju } n \text{ sa } m, & m > 0, \\ 0, & m = 0; \end{cases}$$

$$\mathrm{rm}(m,n) = \begin{cases} \text{ostatak pri deljenju } n \text{ sa } m, & n > 0, \\ n, & m = 0. \end{cases}$$

Količnik i ostatak

Uredjenje: $m \leqslant n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N}\,(m + k = n)$

Deljivost: $m \mid n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists k \in \mathbb{N}\,(m \cdot k = n)$

Teorema o ostatku

Za sve n i $m > 0$ postoje jedinstveni (količnik) q i (ostatak) r takvi da je $n = qm + r$, $0 \leqslant r < m$.

$$\mathrm{qt}(m,n) = \begin{cases} \text{količnik pri deljenju } n \text{ sa } m, & m > 0, \\ 0, & m = 0; \end{cases}$$

$$\mathrm{rm}(m,n) = \begin{cases} \text{ostatak pri deljenju } n \text{ sa } m, & n > 0, \\ n, & m = 0. \end{cases}$$

Umesto $\mathrm{qt}(m,n)$ pišemo $\left[\frac{n}{m}\right]$ (uz dogovor da je $\left[\frac{n}{0}\right] = n$).

Brojevne baze

Teorema o brojevnoj bazi

Neka je $b > 1$. Za svako $a > 0$ postoje jedinstveni prirodni brojevi q, k i r takvi da je

$$a = qb^k + r, 1 \leqslant q < b, 0 \leqslant r < b^k.$$

Brojevne baze

Teorema o brojevnoj bazi

Neka je $b > 1$. Za svako $a > 0$ postoje jedinstveni prirodni brojevi q, k i r takvi da je

$$a = qb^k + r, 1 \leqslant q < b, 0 \leqslant r < b^k.$$

$n = q_0 b + r_0, 0 \leqslant r_0 < b,$

Brojevne baze

Teorema o brojevnoj bazi

Neka je $b > 1$. Za svako $a > 0$ postoje jedinstveni prirodni brojevi q, k i r takvi da je

$$a = qb^k + r, 1 \leqslant q < b, 0 \leqslant r < b^k.$$

$n = q_0 b + r_0, 0 \leqslant r_0 < b,$
$q_0 = q_1 b + r_1, 1 \leqslant r_1 < b, (q_1 < q_0)$

$$n = (q_1 b + r_1)b + r_0 = q_1 b^2 + r_1 b + r_0$$

Brojevne baze

Teorema o brojevnoj bazi

Neka je $b > 1$. Za svako $a > 0$ postoje jedinstveni prirodni brojevi q, k i r takvi da je

$$a = qb^k + r, 1 \leqslant q < b, 0 \leqslant r < b^k.$$

$$\begin{aligned}
&n = q_0 b + r_0, 0 \leqslant r_0 < b, \\
&q_0 = q_1 b + r_1, 1 \leqslant r_1 < b, (q_1 < q_0) \\
&\qquad\qquad n = (q_1 b + r_1) b + r_0 = q_1 b^2 + r_1 b + r_0 \\
&q_1 = q_2 b + r_2, 1 \leqslant r_2 < b, (q_2 < q_1) \\
&\qquad\qquad n = (q_2 b + r_2) b^2 + r_1 b + r_0 = q_2 b^3 + r_2 b^2 + r_1 b + r_0
\end{aligned}$$

Brojevne baze

Teorema o brojevnoj bazi

Neka je $b > 1$. Za svako $a > 0$ postoje jedinstveni prirodni brojevi q, k i r takvi da je

$$a = qb^k + r, 1 \leqslant q < b, 0 \leqslant r < b^k.$$

$$
\begin{aligned}
&n = q_0 b + r_0, 0 \leqslant r_0 < b,\\
&q_0 = q_1 b + r_1, 1 \leqslant r_1 < b, (q_1 < q_0)\\
&\qquad\qquad n = (q_1 b + r_1)b + r_0 = q_1 b^2 + r_1 b + r_0\\
&q_1 = q_2 b + r_2, 1 \leqslant r_2 < b, (q_2 < q_1)\\
&\qquad\qquad n = (q_2 b + r_2)b^2 + r_1 b + r_0 = q_2 b^3 + r_2 b^2 + r_1 b + r_0\\
&\vdots\\
&q_{k-1} = 0b + r_k, 1 \leqslant r_2 < b, (0 < q_{k-1})\\
&\qquad\qquad n = r_k b^k + \cdots + r_2 b^2 + r_1 b + r_0
\end{aligned}
$$

Brojevne baze

Teorema o brojevnoj bazi

Neka je $b > 1$. Za svako $a > 0$ postoje jedinstveni prirodni brojevi q, k i r takvi da je

$$a = qb^k + r, 1 \leqslant q < b, 0 \leqslant r < b^k.$$

$$\begin{aligned}
&n = q_0 b + r_0, 0 \leqslant r_0 < b, \\
&q_0 = q_1 b + r_1, 1 \leqslant r_1 < b, (q_1 < q_0) \\
&\qquad\qquad n = (q_1 b + r_1) b + r_0 = q_1 b^2 + r_1 b + r_0 \\
&q_1 = q_2 b + r_2, 1 \leqslant r_2 < b, (q_2 < q_1) \\
&\qquad\qquad n = (q_2 b + r_2) b^2 + r_1 b + r_0 = q_2 b^3 + r_2 b^2 + r_1 b + r_0 \\
&\vdots \\
&q_{k-1} = 0b + r_k, 1 \leqslant r_2 < b, (0 < q_{k-1}) \\
&\qquad\qquad n = r_k b^k + \cdots + r_2 b^2 + r_1 b + r_0
\end{aligned}$$

Reprezentacija broja n u bazi b jeste zapis $[r_k \cdots r_1 r_0]_b$.

Rastavljanje na proste činioce (kanonska faktorizacija)

Osnovna teorema aritmetike

Za svaki $n > 1$ postoje jedinstveni prosti brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_k$, takvi da je $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, i jedinstveni prirodni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tako da je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$.

Rastavljanje na proste činioce (kanonska faktorizacija)

Osnovna teorema aritmetike

Za svaki $n > 1$ postoje jedinstveni prosti brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_k$, takvi da je $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, i jedinstveni prirodni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tako da je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$.

Ako je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ niz prostih brojeva:

$$p_0 = 2,\ p_1 = 3,\ p_2 = 5,\ p_3 = 7,\ p_4 = 11,\ p_5 = 13,\ p_6 = 17,\ p_7 = 19, \ldots$$

Rastavljanje na proste činioce (kanonska faktorizacija)

Osnovna teorema aritmetike

Za svaki $n > 1$ postoje jedinstveni prosti brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_k$, takvi da je $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, i jedinstveni prirodni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tako da je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$.

Ako je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ niz prostih brojeva:

$$p_0 = 2,\ p_1 = 3,\ p_2 = 5,\ p_3 = 7,\ p_4 = 11,\ p_5 = 13,\ p_6 = 17,\ p_7 = 19, \ldots$$

$\boxed{(n)_k \text{ je najveći prirodan broj } \alpha \text{ takav da } p_k^{\alpha} \mid n \text{ i } p_k^{\alpha+1} \nmid n.}$

Rastavljanje na proste činioce (kanonska faktorizacija)

Osnovna teorema aritmetike

Za svaki $n > 1$ postoje jedinstveni prosti brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_k$, takvi da je $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, i jedinstveni prirodni brojevi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tako da je $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$.

Ako je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ niz prostih brojeva:

$$p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, p_3 = 7, p_4 = 11, p_5 = 13, p_6 = 17, p_7 = 19, \ldots$$

$(n)_k$ je najveći prirodan broj α takav da $p_k^{\alpha} \mid n$ i $p_k^{\alpha+1} \nmid n$.

Na primer, $1960 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$, pa je $(1960)_0 = 3$, $(1960)_1 = 0$, $(1960)_2 = 1$, $(1960)_3 = 2$, $(1960)_k = 0$ za $k > 3$.

Pregled predavanja

Kodiranje (Gedelizacija)

Neka je S prebrojiv skup.

- $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} S$ neformalno posmatramo kao *redjanje elemenata skupa S u niz bez ponavljanja*.

Kodiranje (Gedelizacija)

Neka je S prebrojiv skup.

- $f : \mathbb{N} \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\longrightarrow}} S$ neformalno posmatramo kao *redjanje elemenata skupa S u niz bez ponavljanja*.
- $g : S \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\longrightarrow}} \mathbb{N}$ neformalno posmatramo kao *imenovanje, označavanje ili kodiranje elemenata skupa S prirodnim brojevima*

Kodiranje (Gedelizacija)

Neka je S prebrojiv skup.

- $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} S$ neformalno posmatramo kao *redjanje elemenata skupa S u niz bez ponavljanja*.
- $g : S \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$ neformalno posmatramo kao *imenovanje, označavanje ili kodiranje elemenata skupa S prirodnim brojevima*:
  - svakom $s \in S$ na jedinstven način pridružujemo prirodan broj koji je njegovo ime, oznaka, odn. *kôd*,
  - pri čemu različiti elementi iz S imaju različite kodove i svaki prirodan broj je nečiji kôd.

Kodiranje (Gedelizacija)

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "\mathtt{kodiranje}"'] & S \\ \mathbb{N} \arrow[r, "\text{“}\mathtt{izračunavanje}\text{”}"'] & \mathbb{N} \arrow[u, "\mathtt{dekodiranje}"'] \end{tikzcd}$$

Funkciju $g : S \overset{1-1}{\to} \mathbb{N}$ nazivamo *efektivnim kodiranjem* ili *gedelizacijom* ukoliko su eksplicitno zadati i sledeći efektivni postupci:

- za svaki element $s \in S$ može se u konačnom broju koraka odrediti njemu pridruženi broj $g(s)$,
- za svaki prirodan broj n može se u konačnom broju koraka odrediti čiji je on kôd, tj. može se odrediti $s \in S$ za koji je $g(s) = n$; ovaj postupak se naziva i *dekodiranje*.

Kodiranje skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Funkcija $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, data sa

$$\langle x_1, x_2 \rangle = 2^{x_1}(2x_2 + 1) - 1,$$

jeste bijekcija.

Kodiranje skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Funkcija $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, data sa

$$\langle x_1, x_2 \rangle = 2^{x_1}(2x_2 + 1) - 1,$$

jeste bijekcija.

Njena inverzna funkcija odredjena je funkcijama $\langle \cdot \rangle_1, \langle \cdot \rangle_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\langle n \rangle_1 = (n+1)_0,\ \langle n \rangle_2 = \left[\frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)_0}} - 1}{2} \right],\ n \in \mathbb{N}.$$

Kodiranje skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Funkcija $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, data sa

$$\langle x_1, x_2\rangle = 2^{x_1}(2x_2+1)-1,$$

jeste bijekcija.

Njena inverzna funkcija odredjena je funkcijama $\langle\cdot\rangle_1, \langle\cdot\rangle_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\langle n\rangle_1 = (n+1)_0,\ \langle n\rangle_2 = \left[\frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)_0}}-1}{2}\right],\ n \in \mathbb{N}.$$

Za sve m, n važi:

$$\langle\langle m,n\rangle\rangle_1 = m, \quad \langle\langle m,n\rangle\rangle_2 = n, \quad \langle\langle n\rangle_1, \langle n\rangle_2\rangle = n.$$

Kodiranje skupova $\mathbb{N}^k$, $k > 2$

Svako bijektivno kodiranje uredjenih parova odredjuje po jedno bijektivno kodiranje svakog od skupova $\mathbb{N}^k$, $k > 2$.

Kodiranje skupova $\mathbb{N}^k$, $k > 2$

Svako bijektivno kodiranje uredjenih parova odredjuje po jedno bijektivno kodiranje svakog od skupova $\mathbb{N}^k$, $k > 2$.

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^3$: $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \langle x_1, \langle x_2, x_3 \rangle \rangle$, zajedno sa dekodirajućim funkcijama $x \mapsto \langle x \rangle_1$, $x \mapsto \langle \langle x \rangle_1 \rangle_2$, $x \mapsto \langle \langle x \rangle_2 \rangle_2$.

Kodiranje skupova $\mathbb{N}^k$, $k > 2$

Svako bijektivno kodiranje uredjenih parova odredjuje po jedno bijektivno kodiranje svakog od skupova $\mathbb{N}^k$, $k > 2$.

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^3$: $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \langle x_1, \langle x_2, x_3 \rangle \rangle$, zajedno sa dekodirajućim funkcijama $x \mapsto \langle x \rangle_1$, $x \mapsto \langle \langle x \rangle_1 \rangle_2$, $x \mapsto \langle \langle x \rangle_2 \rangle_2$.

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^4$: $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \langle x_1, \langle x_2, \langle x_3, x_4 \rangle \rangle \rangle$, zajedno sa dekodirajućim funkcijama $x \mapsto \langle x \rangle_1$, $x \mapsto \langle \langle x \rangle_1 \rangle_2$, $x \mapsto \langle \langle \langle x \rangle_1 \rangle_2 \rangle_2$, $x \mapsto \langle \langle \langle x \rangle_2 \rangle_2 \rangle_2$.

$\vdots$

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\text{fin}}$

$\mathbb{N}^{\text{fin}} = \bigcup_{k \geqslant 0} \mathbb{N}^k$ je skup svih konačnih nizova prirodnih brojeva, koji sadrži i *prazan niz*, tj. niz dužine nula, koji ćemo označavati $()$.

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\mathrm{fin}}$

$\mathbb{N}^{\mathrm{fin}} = \bigcup_{k \geqslant 0} \mathbb{N}^k$ je skup svih konačnih nizova prirodnih brojeva, koji sadrži i *prazan niz*, tj. niz dužine nula, koji ćemo označavati ().

Ako je ξ neprazan konačan niz prirodnih brojeva, onda je:

- $\mathrm{head}(\xi)$ – prvi član (glava) niza ξ;
  Npr. $\mathrm{head}(1,0,2) = 1$, $\mathrm{head}(3) = 3$ itd.

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\text{fin}}$

$\mathbb{N}^{\text{fin}} = \bigcup_{k \geqslant 0} \mathbb{N}^k$ je skup svih konačnih nizova prirodnih brojeva, koji sadrži i *prazan niz*, tj. niz dužine nula, koji ćemo označavati $()$.

Ako je ξ neprazan konačan niz prirodnih brojeva, onda je:

- $\mathrm{head}(\xi)$ – prvi član (glava) niza ξ;
  Npr. $\mathrm{head}(1, 0, 2) = 1$, $\mathrm{head}(3) = 3$ itd.
- $\mathrm{tail}(\xi)$ – niz dobijen izostavljanjem glave (rep) niza ξ;
  Npr. $\mathrm{head}(1, 0, 2) = (0, 2)$, $\mathrm{head}(3) = ()$ itd.

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\mathrm{fin}}$

Koristimo bijekciju $|\cdot,\cdot| : \mathbb{N}^2 \underset{\text{na}}{\overset{1-1}{\longrightarrow}} \mathbb{N}^+$ datu sa $|x_1, x_2| = 2^{x_1}(2x_2 + 1)$.

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\mathrm{fin}}$

Koristimo bijekciju $|\cdot,\cdot| : \mathbb{N}^2 \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} \mathbb{N}^+$ datu sa $|x_1, x_2| = 2^{x_1}(2x_2 + 1)$.

Bijekcija $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{N}^{\mathrm{fin}} \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} \mathbb{N}$ odredjena je jednakostima:

- $\lceil()\rceil = 0$;
- $\lceil\xi\rceil = |\mathrm{head}(\xi), \lceil\mathrm{tail}(\xi)\rceil|$, za svaki neprazan niz ξ.

$\boxed{\text{Broj } \lceil\xi\rceil \text{ nazivamo kodom niza } \xi.}$

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\mathrm{fin}}$

Koristimo bijekciju $|\cdot,\cdot| : \mathbb{N}^2 \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} \mathbb{N}^+$ datu sa $|x_1, x_2| = 2^{x_1}(2x_2 + 1)$.

Bijekcija $\ulcorner\cdot\urcorner : \mathbb{N}^{\mathrm{fin}} \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} \mathbb{N}$ odredjena je jednakostima:

- $\ulcorner()\urcorner = 0$;
- $\ulcorner\xi\urcorner = |\mathrm{head}(\xi), \ulcorner\mathrm{tail}(\xi)\urcorner|$, za svaki neprazan niz ξ.

$\boxed{\text{Broj } \ulcorner\xi\urcorner \text{ nazivamo kodom niza } \xi.}$

Npr. $\ulcorner(0)\urcorner = |0, \ulcorner()\urcorner| = |0,0| = 1$, $\ulcorner(1)\urcorner = |1, \ulcorner()\urcorner| = |1,0| = 2$, ...

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\mathrm{fin}}$

Koristimo bijekciju $|\cdot,\cdot| : \mathbb{N}^2 \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\to}} \mathbb{N}^+$ datu sa $|x_1, x_2| = 2^{x_1}(2x_2 + 1)$.

Bijekcija $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{N}^{\mathrm{fin}} \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\to}} \mathbb{N}$ odredjena je jednakostima:

- $\lceil()\rceil = 0$;
- $\lceil\xi\rceil = |\mathrm{head}(\xi), \lceil\mathrm{tail}(\xi)\rceil|$, za svaki neprazan niz ξ.

$\boxed{\text{Broj } \lceil\xi\rceil \text{ nazivamo kodom niza } \xi.}$

Npr. $\lceil(0)\rceil = |0, \lceil()\rceil| = |0, 0| = 1$, $\lceil(1)\rceil = |1, \lceil()\rceil| = |1, 0| = 2$, ...

$$\lceil(x_1)\rceil = |\mathrm{head}(x_1), \lceil\mathrm{tail}(x_1)\rceil| = |x_1, \lceil()\rceil| = |x_1, 0| = 2^{x_1};$$

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\text{fin}}$

Koristimo bijekciju $|\cdot,\cdot| : \mathbb{N}^2 \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\to}} \mathbb{N}^+$ datu sa $|x_1, x_2| = 2^{x_1}(2x_2 + 1)$.

Bijekcija $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{N}^{\text{fin}} \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\to}} \mathbb{N}$ odredjena je jednakostima:

- $\lceil()\rceil = 0$;
- $\lceil\xi\rceil = |\text{head}(\xi), \lceil\text{tail}(\xi)\rceil|$, za svaki neprazan niz ξ.

$\boxed{\text{Broj } \lceil\xi\rceil \text{ nazivamo kodom niza } \xi.}$

Npr. $\lceil(0)\rceil = |0, \lceil()\rceil| = |0, 0| = 1$, $\lceil(1)\rceil = |1, \lceil()\rceil| = |1, 0| = 2$, ...

$$\lceil(x_1)\rceil = |\text{head}(x_1), \lceil\text{tail}(x_1)\rceil| = |x_1, \lceil()\rceil| = |x_1, 0| = 2^{x_1};$$

$\lceil(0, 0)\rceil = |0, \lceil(0)\rceil| = |0, 1| = 3$, $\lceil(0, 1)\rceil = |0, \lceil(1)\rceil| = |0, 2| = 5$ ...

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\text{fin}}$

Koristimo bijekciju $|\cdot,\cdot| : \mathbb{N}^2 \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\to}} \mathbb{N}^+$ datu sa $|x_1, x_2| = 2^{x_1}(2x_2 + 1)$.

Bijekcija $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{N}^{\text{fin}} \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\to}} \mathbb{N}$ odredjena je jednakostima:

- $\lceil()\rceil = 0$;
- $\lceil\xi\rceil = |\text{head}(\xi), \lceil\text{tail}(\xi)\rceil|$, za svaki neprazan niz ξ.

$\boxed{\text{Broj } \lceil\xi\rceil \text{ nazivamo kodom niza } \xi.}$

Npr. $\lceil(0)\rceil = |0, \lceil()\rceil| = |0,0| = 1$, $\lceil(1)\rceil = |1, \lceil()\rceil| = |1,0| = 2$, ...

$$\lceil(x_1)\rceil = |\text{head}(x_1), \lceil\text{tail}(x_1)\rceil| = |x_1, \lceil()\rceil| = |x_1, 0| = 2^{x_1};$$

$\lceil(0,0)\rceil = |0, \lceil(0)\rceil| = |0,1| = 3$, $\lceil(0,1)\rceil = |0, \lceil(1)\rceil| = |0,2| = 5$ ...

$\lceil(x_1,x_2)\rceil = |x_1, \lceil(x_2)\rceil| = 2^{x_1}(2 \cdot 2^{x_2} + 1) = 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1}$

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\text{fin}}$

Koristimo bijekciju $|\cdot,\cdot| : \mathbb{N}^2 \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} \mathbb{N}^+$ datu sa $|x_1, x_2| = 2^{x_1}(2x_2 + 1)$.

Bijekcija $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{N}^{\text{fin}} \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} \mathbb{N}$ odredjena je jednakostima:

- $\lceil()\rceil = 0$;
- $\lceil\xi\rceil = |\mathrm{head}(\xi), \lceil\mathrm{tail}(\xi)\rceil|$, za svaki neprazan niz ξ.

$\boxed{\text{Broj } \lceil\xi\rceil \text{ nazivamo kodom niza } \xi.}$

Npr. $\lceil(0)\rceil = |0, \lceil()\rceil| = |0,0| = 1$, $\lceil(1)\rceil = |1, \lceil()\rceil| = |1,0| = 2$, ...

$$\lceil(x_1)\rceil = |\mathrm{head}(x_1), \lceil\mathrm{tail}(x_1)\rceil| = |x_1, \lceil()\rceil| = |x_1, 0| = 2^{x_1};$$

$\lceil(0,0)\rceil = |0, \lceil(0)\rceil| = |0,1| = 3$, $\lceil(0,1)\rceil = |0, \lceil(1)\rceil| = |0,2| = 5$ ...

$\lceil(x_1,x_2)\rceil = |x_1, \lceil(x_2)\rceil| = 2^{x_1}(2 \cdot 2^{x_2} + 1) = 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1}$

$\lceil(x_1,x_2,x_3)\rceil = |x_1, \lceil(x_2,x_3)\rceil| = 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1} + 2^{x_1+x_2+x_3+2}$

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\text{fin}}$

Bijekcija $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{N}^{\text{fin}} \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\longrightarrow}} \mathbb{N}$ odredjena je jednakostima:

- $\lceil()\rceil = 0$;
- $\lceil\xi\rceil = |\text{head}(\xi), \lceil\text{tail}(\xi)\rceil|$, za svaki neprazan niz ξ.

$$\begin{aligned}\lceil x_1,\ldots,x_k\rceil &= |x_1, |x_2, \cdots |x_k, 0| \cdots || \\ &= 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1} + \cdots + 2^{x_1+x_2+\cdots+x_k+k-1} \\ &= [1\underbrace{0\ldots0}_{x_k\ \text{nula}}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{x_1\ \text{nula}}]_2\end{aligned}$$

PRIMER 1.

$\lceil 3,2,4\rceil = [1\underbrace{0000}_{4}1\underbrace{00}_{2}1\underbrace{000}_{3}]_2 = 2^3 + 2^6 + 2^{11} = 2120$,

$\lceil 1,2,0,1\rceil = [10110010]_2 = 2^1 + 2^4 + 2^5 + 2^7 = 178$, itd.

PRIMER 2. Odredimo konačan niz čiji je kôd 372.

$372 = [101110100]_2 = \lceil 2,1,0,0,1\rceil$

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\text{fin}}$

Bijekcija $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{N}^{\text{fin}} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$ odredjena je jednakostima:

- $\lceil () \rceil = 0$;
- $\lceil \xi \rceil = |\text{head}(\xi), \lceil \text{tail}(\xi) \rceil|$, za svaki neprazan niz ξ.

$$\begin{aligned}
\lceil x_1, \dots, x_k \rceil &= |x_1, |x_2, \cdots |x_k, 0| \cdots || \\
&= 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1} + \cdots + 2^{x_1+x_2+\cdots+x_k+k-1} \\
&= [1 \underbrace{0 \dots 0}_{x_k \text{ nula}} 1 \dots 1 \underbrace{0 \dots 0}_{x_1 \text{ nula}}]_2
\end{aligned}$$

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\text{fin}}$

Bijekcija $\ulcorner \cdot \urcorner : \mathbb{N}^{\text{fin}} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$ odredjena je jednakostima:

- $\ulcorner () \urcorner = 0$;
- $\ulcorner \xi \urcorner = |\mathrm{head}(\xi), \ulcorner \mathrm{tail}(\xi) \urcorner|$, za svaki neprazan niz ξ.

$$\begin{aligned}\ulcorner x_1, \dots, x_k \urcorner &= |x_1, |x_2, \cdots |x_k, 0| \cdots || \\ &= 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1} + \cdots + 2^{x_1+x_2+\cdots+x_k+k-1} \\ &= [1 \underbrace{0 \dots 0}_{x_k \text{ nula}} 1 \dots 1 \underbrace{0 \dots 0}_{x_1 \text{ nula}}]_2\end{aligned}$$

Primer 1.

$\ulcorner 3, 2, 4 \urcorner = [1 \underbrace{0000}_{4} 1 \underbrace{00}_{2} 1 \underbrace{000}_{3}]_2 = 2^3 + 2^6 + 2^{11} = 2120$,

$\ulcorner 1, 2, 0, 1 \urcorner = [10110010]_2 = 2^1 + 2^4 + 2^5 + 2^7 = 178$, itd.

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\text{fin}}$

Bijekcija $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{N}^{\text{fin}} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$ odredjena je jednakostima:

- $\lceil()\rceil = 0$;
- $\lceil\xi\rceil = |\mathrm{head}(\xi), \lceil\mathrm{tail}(\xi)\rceil|$, za svaki neprazan niz ξ.

$$\begin{aligned}\lceil x_1,\ldots,x_k\rceil &= |x_1,|x_2,\cdots|x_k,0|\cdots||\\ &= 2^{x_1}+2^{x_1+x_2+1}+\cdots+2^{x_1+x_2+\cdots+x_k+k-1}\\ &= [1\underbrace{0\ldots0}_{x_k\ \text{nula}}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{x_1\ \text{nula}}]_2\end{aligned}$$

PRIMER 1.
$\lceil 3,2,4\rceil = [1\underbrace{0000}_{4}1\underbrace{00}_{2}1\underbrace{000}_{3}]_2 = 2^3+2^6+2^{11} = 2120$,
$\lceil 1,2,0,1\rceil = [10110010]_2 = 2^1+2^4+2^5+2^7 = 178$, itd.

PRIMER 2. Odredimo konačan niz čiji je kôd 372.

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\text{fin}}$

Bijekcija $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{N}^{\text{fin}} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$ odredjena je jednakostima:

- $\lceil()\rceil = 0$;
- $\lceil\xi\rceil = |\text{head}(\xi), \lceil\text{tail}(\xi)\rceil|$, za svaki neprazan niz ξ.

$$\begin{aligned}\lceil x_1, \dots, x_k\rceil &= |x_1, |x_2, \cdots |x_k, 0| \cdots || \\ &= 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1} + \cdots + 2^{x_1+x_2+\cdots+x_k+k-1} \\ &= [1\underbrace{0\dots0}_{x_k \text{ nula}}1\dots1\underbrace{0\dots0}_{x_1 \text{ nula}}]_2\end{aligned}$$

PRIMER 1.
$\lceil 3,2,4\rceil = [1\underbrace{0000}_{4}1\underbrace{00}_{2}1\underbrace{000}_{3}]_2 = 2^3 + 2^6 + 2^{11} = 2120$,
$\lceil 1,2,0,1\rceil = [10110010]_2 = 2^1 + 2^4 + 2^5 + 2^7 = 178$, itd.

PRIMER 2. Odredimo konačan niz čiji je kôd 372.

$372 = [101110100]_2$

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\mathrm{fin}}$

Bijekcija $\lceil\cdot\rceil : \mathbb{N}^{\mathrm{fin}} \overset{1-1}{\underset{\mathrm{na}}{\to}} \mathbb{N}$ odredjena je jednakostima:

- $\lceil()\rceil = 0$;
- $\lceil\xi\rceil = |\mathrm{head}(\xi), \lceil\mathrm{tail}(\xi)\rceil|$, za svaki neprazan niz ξ.

$$\begin{aligned}\lceil x_1, \ldots, x_k\rceil &= |x_1, |x_2, \cdots |x_k, 0| \cdots || \\ &= 2^{x_1} + 2^{x_1+x_2+1} + \cdots + 2^{x_1+x_2+\cdots+x_k+k-1} \\ &= [1\,\underbrace{0\ldots0}_{x_k \text{ nula}}\,1\ldots1\,\underbrace{0\ldots0}_{x_1 \text{ nula}}]_2\end{aligned}$$

PRIMER 1.
$\lceil 3,2,4\rceil = [1\,\underbrace{0000}_{4}\,1\,\underbrace{00}_{2}\,1\,\underbrace{000}_{3}]_2 = 2^3 + 2^6 + 2^{11} = 2120$,
$\lceil 1,2,0,1\rceil = [10110010]_2 = 2^1 + 2^4 + 2^5 + 2^7 = 178$, itd.

PRIMER 2. Odredimo konačan niz čiji je kôd 372.

$372 = [101110100]_2 = \lceil 2,1,0,0,1\rceil$

Kodiranje skupa $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$

$\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ je skup svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$.

Kodiranje skupa $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$

$\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ je skup svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$.

$v : \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} \mathbb{N}$, $v(\emptyset) = 0$, $v(\{n_1, \ldots, n_k\}) = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$

Kodiranje skupa $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$

$\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ je skup svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$.

$v : \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} \mathbb{N}$, $v(\emptyset) = 0$, $v(\{n_1, \ldots, n_k\}) = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$

Primer 1. Odredimo kôd skupa $\{3, 2, 4\}$.
$v(\{3, 2, 4\}) = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 28$

Kodiranje skupa $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$

$\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ je skup svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$.

$v : \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} \mathbb{N},\ v(\emptyset) = 0,\ v(\{n_1, \dots, n_k\}) = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$

PRIMER 1. Odredimo kôd skupa $\{3, 2, 4\}$.

$v(\{3, 2, 4\}) = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 28$

$$\lceil 3, 2, 4 \rceil = [1\underbrace{0000}_{4}1\underbrace{00}_{2}1\underbrace{000}_{3}]_2 = 2^3 + 2^6 + 2^{11} = 2120$$

Kodiranje skupa $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$

$\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ je skup svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$.

$v : \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\to}} \mathbb{N}$, $v(\emptyset) = 0$, $v(\{n_1, \dots, n_k\}) = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$

PRIMER 1. Odredimo kôd skupa $\{3, 2, 4\}$.

$v(\{3, 2, 4\}) = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 28$

$$\lceil 3, 2, 4 \rceil = [1\underbrace{0000}_{4}1\underbrace{00}_{2}1\underbrace{000}_{3}]_2 = 2^3 + 2^6 + 2^{11} = 2120$$

PRIMER 2. Odredimo skup čiji je kôd 372.

Kodiranje skupa $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$

$\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ je skup svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$.

$v : \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} \mathbb{N}$, $v(\emptyset) = 0$, $v(\{n_1, \dots, n_k\}) = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$

PRIMER 1. Odredimo kôd skupa $\{3, 2, 4\}$.
$v(\{3, 2, 4\}) = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 28$

$$\lceil 3, 2, 4 \rceil = [1\underbrace{0000}_{4}1\underbrace{00}_{2}1\underbrace{000}_{3}]_2 = 2^3 + 2^6 + 2^{11} = 2120$$

PRIMER 2. Odredimo skup čiji je kôd 372.

$372 = 2^2 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^8$

Kodiranje skupa $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$

$\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ je skup svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$.

$v : \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} \mathbb{N},\ v(\emptyset) = 0,\ v(\{n_1, \ldots, n_k\}) = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$

Primer 1. Odredimo kôd skupa $\{3, 2, 4\}$.

$v(\{3, 2, 4\}) = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 28$

$$\lceil 3, 2, 4 \rceil = [1\underbrace{0000}_{4}1\underbrace{00}_{2}1\underbrace{000}_{3}]_2 = 2^3 + 2^6 + 2^{11} = 2120$$

Primer 2. Odredimo skup čiji je kôd 372.

$372 = 2^2 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^8 = \{2, 4, 5, 6, 8\}$

Kodiranje skupa $\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$

$\mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ je skup svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$.

$v : \mathcal{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} \mathbb{N}$, $v(\emptyset) = 0$, $v(\{n_1, \dots, n_k\}) = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$

Primer 1. Odredimo kôd skupa $\{3, 2, 4\}$.

$v(\{3,2,4\}) = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 28$

$$\lceil 3,2,4 \rceil = [1\underbrace{0000}_{4}1\underbrace{00}_{2}1\underbrace{000}_{3}]_2 = 2^3 + 2^6 + 2^{11} = 2120$$

Primer 2. Odredimo skup čiji je kôd 372.

$372 = 2^2 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^8 = \{2,4,5,6,8\}$

$$372 = [101110100]_2$$

Kodiranje skupa $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$

$\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ je skup svih konačnih podskupova od $\mathbb{N}$.

$v : \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathbb{N}) \overset{1-1}{\underset{\text{na}}{\rightarrow}} \mathbb{N},\ v(\emptyset) = 0,\ v(\{n_1, \ldots, n_k\}) = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}$

PRIMER 1. Odredimo kôd skupa $\{3, 2, 4\}$.

$v(\{3, 2, 4\}) = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 28$

$$\lceil 3, 2, 4 \rceil = [1\underbrace{0000}_{4}1\underbrace{00}_{2}1\underbrace{000}_{3}]_2 = 2^3 + 2^6 + 2^{11} = 2120$$

PRIMER 2. Odredimo skup čiji je kôd 372.

$372 = 2^2 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^8 = \{2, 4, 5, 6, 8\}$

$$372 = [101110100]_2 = \lceil 2, 1, 0, 0, 1 \rceil$$

Pregled predavanja

Kodiranje skupa $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ nije moguće

Kada god nizove prirodnih brojeva poredjamo u niz:

$$\begin{array}{lcl}
x_0 & : & n_0^0, n_1^0, n_2^0, n_3^0, n_4^0, \cdots \\
x_1 & : & n_0^1, n_1^1, n_2^1, n_3^1, n_4^1, \cdots \\
x_2 & : & n_0^2, n_1^2, n_2^2, n_3^2, n_4^2, \cdots \\
x_3 & : & n_0^3, n_1^3, n_2^3, n_3^3, n_4^3, \cdots \\
\vdots & &
\end{array}$$

uvek je moguće definisati niz prirodnih brojeva koji se ne nalazi na toj listi: neka je (m_k) niz prirodnih brojeva takav da za svako k važi $m_k \neq n_k^k$. Niz (m_k) ne nalazi se na listi, jer je različit od svakog niza liste.

Kodiranje skupa $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nije moguće

Skup $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, svih (i konačnih i beskonačnih) podskupova od $\mathbb{N}$, možemo identifikovati sa skupom $2^{\mathbb{N}}$ svih binarnih nizova: svaki $A \subseteq \mathbb{N}$ odredjuje jedinstvenu funkciju $\chi_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$,

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1, & n \in A, \\ 0, & n \notin A, \end{cases}$$

a svaki binarni niz $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ odredjuje jedinstveni podskup $A_f = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 1\}$ skupa $\mathbb{N}$.
Dijagonalizacija ...

Pregled predavanja

Mala modifikacija brojevnih sistema

Posledica leme o ostatku

Za svaki prirodan broj $n > 0$ postoje jedinstveni q i r takvi da je $n = qb + r$, $1 \leqslant r \leqslant b$.

Mala modifikacija brojevnih sistema

Posledica leme o ostatku

Za svaki prirodan broj $n > 0$ postoje jedinstveni q i r takvi da je $n = qb + r$, $1 \leqslant r \leqslant b$.

Za svaki prirodan broj $n > 0$ postoje jedinstveni k, $r_k, \ldots, r_1, r_0$ takvi da je

$$n = r_k b^k + \cdots + r_1 b^1 + r_0, 1 \leqslant r_k, \ldots, r_1, r_0 \leqslant b.$$

Zapis $[r_k \ldots r_1 r_0]_b$ nazivamo reprezentacijom broja n u *modifikovanom* sistemu baze b.

Modifikovani dekadni sistem

Cifre modifikovanog dekadnog sistema: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X.

0									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	X
11	12	13	14	15	16	17	18	19	1X
21	22	23	24	25	26	27	28	29	2X
⋮									
91	92	93	94	95	96	97	98	99	9X
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	XX
111	112	113	114	115	116	117	118	119	11X
⋮									

Modifikovani dekadni sistem

Cifre modifikovanog dekadnog sistema: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X.

0									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	X
11	12	13	14	15	16	17	18	19	1X
21	22	23	24	25	26	27	28	29	2X
⋮									
91	92	93	94	95	96	97	98	99	9X
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	XX
111	112	113	114	115	116	117	118	119	11X
⋮									

Broju 3001 (zapisanom u uobičajenom dekadnom sistemu), u modifikovanom dekadnom sistemu odgovara zapis $29\mathrm{X}1$:

$$\begin{aligned} 3001 &= 300 \cdot 10 + \mathbf{1}, \\ 300 &= 29 \cdot 10 + \mathbf{X}, \\ 29 &= 2 \cdot 10 + \mathbf{9}, \\ 2 &= 0 \cdot 10 + \mathbf{2}. \end{aligned}$$

Modifikovani dekadni sistem

Cifre modifikovanog dekadnog sistema: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, X.

0									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	X
11	12	13	14	15	16	17	18	19	1X
21	22	23	24	25	26	27	28	29	2X
⋮									
91	92	93	94	95	96	97	98	99	9X
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	XX
111	112	113	114	115	116	117	118	119	11X
⋮									

Broju 3001 (zapisanom u uobičajenom dekadnom sistemu), u modifikovanom dekadnom sistemu odgovara zapis $29\mathrm{X}1$:

$$\begin{aligned} 3001 &= 300 \cdot 10 + \mathbf{1}, \\ 300 &= 29 \cdot 10 + \mathbf{X}, \\ 29 &= 2 \cdot 10 + \mathbf{9}, \\ 2 &= 0 \cdot 10 + \mathbf{2}. \end{aligned}$$

Modifikovani dekadni sistem

Zapisu $2\mathrm{X}3\mathrm{X}$ odgovara sledeći zapis u uobičajenom dekadnom sistemu:

$$2\mathrm{X}3\mathrm{X} = 2 \cdot 10^3 + \mathrm{X} \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + \mathrm{X} = 2000 + 1000 + 30 + 10 = 3040.$$

Modifikovani dekadni sistem

Zapisu $2X3X$ odgovara sledeći zapis u uobičajenom dekadnom sistemu:

$$2X3X = 2 \cdot 10^3 + X \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + X = 2000 + 1000 + 30 + 10 = 3040.$$

Poznate postupke sabiranja i množenja bez problema prilagodjavamo modifikovanom sistemu koristeći odgovarajuće tablice.

Unarni sistem (‘recka’ sistem)

U modifikovane pozicione sisteme možemo uključiti i sistem sa bazom 1, u kome se prirodni brojevi prikazuju samo jednim simbolom, na primer znakom 1:

$$\varepsilon, 1, 11, 111, 1111, \cdots$$

Unarni sistem ('recka' sistem)

U modifikovane pozicione sisteme možemo uključiti i sistem sa bazom 1, u kome se prirodni brojevi prikazuju samo jednim simbolom, na primer znakom 1:

$$\varepsilon, 1, 11, 111, 1111, \cdots$$

Reprezentacija prirodnih brojeva pomoću jednog simbola predstavlja najprimitivniji način zapisivanja brojeva, ako uzmemo u obzir da su, u začecima ljudske civilizacije, količine beležene pisanjem *recki*. Pored toga, zapisivanje brojeva jednim simbolom saglasno je i sa reprezentacijama brojeva na koje nas direktno navodi jezik Peanove aksiomatike:

$$0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \ldots$$

Alfabet

Pod *alfabetom* Σ podrazumevamo bilo koji neprazan konačan skup čije elemente nazivamo *simbolima*.

Alfabet

Pod *alfabetom* Σ podrazumevamo bilo koji neprazan konačan skup čije elemente nazivamo *simbolima*.

- $\Sigma_{\mathrm{U}} = \{1\}$ – *unarni alfabet*, koji sadrži samo jedan simbol;

Alfabet

Pod *alfabetom* Σ podrazumevamo bilo koji neprazan konačan skup čije elemente nazivamo *simbolima*.

- $\Sigma_{\mathrm{U}} = \{1\}$ – *unarni alfabet*, koji sadrži samo jedan simbol;
- $\Sigma_2 = \{0, 1\}$ – *binarni alfabet*, veoma važan za računarstvo;

Alfabet

Pod *alfabetom* Σ podrazumevamo bilo koji neprazan konačan skup čije elemente nazivamo *simbolima*.

- $\Sigma_{\mathrm{U}} = \{1\}$ – *unarni alfabet*, koji sadrži samo jedan simbol;
- $\Sigma_2 = \{0, 1\}$ – *binarni alfabet*, veoma važan za računarstvo;
- $\Sigma_{\mathrm{lat}} = \{a, b, c, \ldots, z\}$ – mala slova latinica;

Alfabet

Pod *alfabetom* Σ podrazumevamo bilo koji neprazan konačan skup čije elemente nazivamo *simbolima*.

- $\Sigma_{\mathrm{U}} = \{1\}$ – *unarni alfabet*, koji sadrži samo jedan simbol;
- $\Sigma_2 = \{0, 1\}$ – *binarni alfabet*, veoma važan za računarstvo;
- $\Sigma_{\mathrm{lat}} = \{a, b, c, \ldots, z\}$ – mala slova latinica;
- $\Sigma_{\mathrm{keyboard}} = \{\mathtt{A}, \mathtt{a}, \mathtt{B}, \mathtt{b}, \ldots, \mathtt{Z}, \mathtt{z}, \sqcup, >, <, (,), \ldots, !\}$ je alfabet svih simbola tastature, pri čemu $\sqcup$ označava blanko znak.

Alfabet

Pod *alfabetom* Σ podrazumevamo bilo koji neprazan konačan skup čije elemente nazivamo *simbolima*.

- $\Sigma_{\mathrm{U}} = \{1\}$ – *unarni alfabet*, koji sadrži samo jedan simbol;
- $\Sigma_2 = \{0, 1\}$ – *binarni alfabet*, veoma važan za računarstvo;
- $\Sigma_{\mathrm{lat}} = \{a, b, c, \ldots, z\}$ – mala slova latinica;
- $\Sigma_{\mathrm{keyboard}} = \{\mathtt{A}, \mathtt{a}, \mathtt{B}, \mathtt{b}, \ldots, \mathtt{Z}, \mathtt{z}, \sqcup, >, <, (,), \ldots, !\}$ je alfabet svih simbola tastature, pri čemu $\sqcup$ označava blanko znak.

Reč

$\Sigma^m = \underbrace{\Sigma \times \cdots \times \Sigma}_{m \text{ puta}}$, $m \geqslant 1$, skup svih m-torki simbola iz Σ koji nazivamo i skupom svih *reči nad* Σ *dužine* m.

Reč

$\Sigma^m = \underbrace{\Sigma \times \cdots \times \Sigma}_{m \text{ puta}}$, $m \geqslant 1$, skup svih m-torki simbola iz Σ koji nazivamo i skupom svih *reči nad* Σ *dužine* m.

$\boxed{\text{Umesto } (a_1, \ldots, a_m) \text{ pišemo } a_1 \cdots a_m.}$

Reč

$\Sigma^m = \underbrace{\Sigma \times \cdots \times \Sigma}_{m \text{ puta}}$, $m \geqslant 1$, skup svih m-torki simbola iz Σ koji nazivamo i skupom svih *reči nad* Σ *dužine* m.

$\boxed{\text{Umesto } (a_1, \ldots, a_m) \text{ pišemo } a_1 \cdots a_m.}$

Σ^1, tj. skup svih reči nad Σ dužine 1, identifikujemo sa Σ.

Reč

$\Sigma^m = \underbrace{\Sigma \times \cdots \times \Sigma}_{m \text{ puta}}$, $m \geqslant 1$, skup svih m-torki simbola iz Σ koji nazivamo i skupom svih *reči nad* Σ *dužine* m.

$\boxed{\text{Umesto } (a_1, \ldots, a_m) \text{ pišemo } a_1 \cdots a_m.}$

Σ^1, tj. skup svih reči nad Σ dužine 1, identifikujemo sa Σ.

Skup Σ^0 je jednočlani skup čiji ćemo element označavati ε i nazivati ga *prazna reč*.

Reč

$\Sigma^m = \underbrace{\Sigma \times \cdots \times \Sigma}_{m \text{ puta}}$, $m \geqslant 1$, skup svih m-torki simbola iz Σ koji nazivamo i skupom svih *reči nad* Σ *dužine* m.

$\boxed{\text{Umesto } (a_1, \ldots, a_m) \text{ pišemo } a_1 \cdots a_m.}$

Σ^1, tj. skup svih reči nad Σ dužine 1, identifikujemo sa Σ.

Skup Σ^0 je jednočlani skup čiji ćemo element označavati ε i nazivati ga *prazna reč*.

Skup svih reči nad Σ označavamo Σ^*, a skup svih nepraznih reči Σ^+:

$$\Sigma^+ = \bigcup_{m \geqslant 1} \Sigma^m, \ \Sigma^* = \bigcup_{m \geqslant 0} \Sigma^m = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\}.$$

Reč

$\Sigma^m = \underbrace{\Sigma \times \cdots \times \Sigma}_{m \text{ puta}}$, $m \geqslant 1$, skup svih m-torki simbola iz Σ koji nazivamo i skupom svih *reči nad* Σ *dužine* m.

$\boxed{\text{Umesto } (a_1, \ldots, a_m) \text{ pišemo } a_1 \cdots a_m.}$

Σ^1, tj. skup svih reči nad Σ dužine 1, identifikujemo sa Σ.

Skup Σ^0 je jednočlani skup čiji ćemo element označavati ε i nazivati ga *prazna reč*.

Skup svih reči nad Σ označavamo Σ^*, a skup svih nepraznih reči Σ^+:

$$\Sigma^+ = \bigcup_{m \geqslant 1} \Sigma^m, \; \Sigma^* = \bigcup_{m \geqslant 0} \Sigma^m = \Sigma^+ \cup \{\varepsilon\}.$$

Da je w reč dužine m, zapisujemo $|w| = m$.

Operacija dopisivanja

Ako je $u = a_1 \cdots a_k$, $v = b_1 \cdots b_\ell \in \Sigma^*$, onda je uv reč $a_1 \dots a_k b_1 \dots b_\ell$.

Operacija dopisivanja

Ako je $u = a_1 \cdots a_k$, $v = b_1 \cdots b_\ell \in \Sigma^*$, onda je uv reč $a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_\ell$.

Osobine:

- dopisivanje je asocijativno: $(uv)w = u(vw)$,
- ε je neutralni element: $w\varepsilon = \varepsilon w = w$.

Operacija dopisivanja

Ako je $u = a_1 \cdots a_k$, $v = b_1 \cdots b_\ell \in \Sigma^*$, onda je uv reč $a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_\ell$.

OSOBINE:

- dopisivanje je asocijativno: $(uv)w = u(vw)$,
- ε je neutralni element: $w\varepsilon = \varepsilon w = w$.

DEFINICIJA: $w^0 = \varepsilon$, $w^{n+1} = w^n w$

Operacija dopisivanja

Ako je $u = a_1 \cdots a_k$, $v = b_1 \cdots b_\ell \in \Sigma^*$, onda je uv reč $a_1 \ldots a_k b_1 \ldots b_\ell$.

OSOBINE:

- dopisivanje je asocijativno: $(uv)w = u(vw)$,
- ε je neutralni element: $w\varepsilon = \varepsilon w = w$.

DEFINICIJA: $w^0 = \varepsilon$, $w^{n+1} = w^n w$

Ako $w \in \Sigma^*$, *podreč* reči w je svaka reč $u \in \Sigma^*$, takva da je $w = v_1 u v_2$, za neke $v_1, v_2 \in \Sigma^*$.

Operacija dopisivanja

Ako je $u = a_1 \cdots a_k$, $v = b_1 \cdots b_\ell \in \Sigma^*$, onda je uv reč $a_1 \dots a_k b_1 \dots b_\ell$.

OSOBINE:

- dopisivanje je asocijativno: $(uv)w = u(vw)$,
- ε je neutralni element: $w\varepsilon = \varepsilon w = w$.

DEFINICIJA: $w^0 = \varepsilon$, $w^{n+1} = w^n w$

Ako $w \in \Sigma^*$, *podreč* reči w je svaka reč $u \in \Sigma^*$, takva da je $w = v_1 u v_2$, za neke $v_1, v_2 \in \Sigma^*$.

Ako je $w = uv$, onda se kaže da je u *prefiks* reči w, kao i da je v *sufiks* reči w.

Leksikografsko uredjenje

Neka je $\Sigma = \{s_1, \ldots, s_m\}$ alfabet čiji su simboli linearno uredjeni: $s_1 < s_2 < \ldots < s_m$.

Leksikografsko uredjenje

Neka je $\Sigma = \{s_1, \ldots, s_m\}$ alfabet čiji su simboli linearno uredjeni: $s_1 < s_2 < \ldots < s_m$.

Na skupu Σ^* uvodimo **strogi leksikografski poredak** $<_{\text{lex}}$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} u <_{\text{lex}} v \Leftrightarrow \ & (|u| < |v|) \vee \\ & \vee (|u| = |v| \wedge u = ws_i x \wedge v = ws_j y \text{ za neke } w, x, y \in \Sigma^* \text{ i } s_i < s_j). \end{aligned}$$

Naravno, $u \leqslant_{\text{lex}} v \Leftrightarrow u <_{\text{lex}} v \vee u = v$.

Leksikografsko uredjenje

Neka je $\Sigma = \{s_1, \ldots, s_m\}$ alfabet čiji su simboli linearno uredjeni: $s_1 < s_2 < \ldots < s_m$.

Na skupu Σ^* uvodimo **strogi leksikografski poredak** $<_{\mathrm{lex}}$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} u <_{\mathrm{lex}} v \Leftrightarrow \ & (|u| < |v|) \vee \\ & \vee (|u| = |v| \wedge u = ws_ix \wedge v = ws_jy \text{ za neke } w, x, y \in \Sigma^* \text{ i } s_i < s_j). \end{aligned}$$

Naravno, $u \leqslant_{\mathrm{lex}} v \Leftrightarrow u <_{\mathrm{lex}} v \vee u = v$.

Ako je $\Sigma = \{0, 1\}$ i $0 < 1$, onda je:
$\varepsilon <_{\mathrm{lex}} 0 <_{\mathrm{lex}} 1 <_{\mathrm{lex}} 00 <_{\mathrm{lex}} 01 <_{\mathrm{lex}} 10 <_{\mathrm{lex}} 11 <_{\mathrm{lex}} 000 <_{\mathrm{lex}} 001 <_{\mathrm{lex}} 010 <_{\mathrm{lex}} 011 <_{\mathrm{lex}} 100 <_{\mathrm{lex}} \cdots$

Jezici

Jezik nad alfabetom Σ je bilo koji podskup od Σ^*.

Jezici

Jezik nad alfabetom Σ je bilo koji podskup od Σ^*.

PRIMER. Nekoliko netrivijalnih jezika nad $\{a, b\}$:

$L_1 = \{\varepsilon, ab, bab\}$;

$L_2 = \{a^p \mid p \text{ je prost broj}\} = \{aa, aaa, aaaaa, aaaaaaa, \ldots\}$;

$L_3 = \{a^i b^{i+j} a^j \mid i, j \geqslant 1\}$;

$L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$, pri čemu, za $s \in \{a, b\}$, $|w|_s$ označava broj pojavljivanja simbola s u reči w.

Jezici

Jezik nad alfabetom Σ je bilo koji podskup od Σ^*.

PRIMER. Nekoliko netrivijalnih jezika nad $\{a, b\}$:

$L_1 = \{\varepsilon, ab, bab\}$;

$L_2 = \{a^p \mid p \text{ je prost broj}\} = \{aa, aaa, aaaaa, aaaaaaa, \ldots\}$;

$L_3 = \{a^i b^{i+j} a^j \mid i, j \geqslant 1\}$;

$L_4 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$, pri čemu, za $s \in \{a, b\}$, $|w|_s$ označava broj pojavljivanja simbola s u reči w.

Operacije nad jezicima:

- *Unija* jezika L_1 i L_2 jeste $L_1 \cup L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L_1 \text{ ili } w \in L_2\}$.
- *Presek* jezika L_1 i L_2 jeste $L_1 \cap L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L_1 \text{ i } w \in L_2\}$.
- *Komplement* jezika L jeste $L^\complement = \Sigma^* \setminus L = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L\}$.
- *Nadovezivanjem* jezika L_1 i L_2 dobijamo $L_1 L_2 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}$.